

Université Sidi Mohammed Ben Abdellah

Faculté des Sciences et Techniques de Fes

UFR Signaux Systèmes et Composants

THESE

présentée par Oumnia LICER

Commande des Allures de Marche Stables
d'un Robot Bipède type-Compas

Année Scolaire 2007-2008

Table des matières

Liste des figures	10
Introduction	3
0.1 Robot et Robotique	3
0.2 Robot et autonomie	4
0.3 Robots à pattes	5
0.4 Robot bipède	6
0.5 Réalisations actuelles	6
0.6 Approches de commande	8
0.6.1 Suivi de trajectoire pré-calculée	10
0.6.2 Stabilisation de trajectoires cycliques	11
0.7 la marche passive	12
0.8 Contributions	14
0.9 Organisation du mémoire	14
1 Analyse de la Marche bipodale de l'homme au robot	17
1.1 La marche humaine	17
1.1.1 Les paramètres de la marche	18
1.1.2 Le cycle de marche	18
1.1.2.1 La phase d'appui	18
1.1.2.2 La phase oscillante (phase de balancement)	19
1.1.3 Marche et équilibre	19
1.1.4 Marche et centre de gravité	20
1.1.4.1 Débattement du centre de gravité	21
1.1.4.2 Les effets des mécanismes de la marche sur le centre de gravité	22
1.1.5 Economie de l'énergie pendant la marche	23
1.2 La marche robotique	24
1.2.1 Modèle cinématique d'un robot bipède	24
1.2.2 Modélisation dynamique d'un robot bipède	25

1.2.3	Modélisation du phénomène de contact pieds-sol	27
1.2.4	Les équations de la dynamique d'un cycle de marche	29
1.2.4.1	La dynamique du double support	29
1.2.4.2	La dynamique du simple support :	29
1.2.4.3	Equation de l'impact	29
1.2.5	Contraintes de la marche	30
1.2.6	Minimisation des dépenses énergétiques	30
1.2.7	Marche statique et marche dynamique	31
1.3	Conclusion	32
2	La marche robotique passive	33
2.1	Le robot type compas	34
2.1.1	Description	34
2.1.1.1	Configuration du robot	34
2.1.1.2	Hypothèses simplificatrices	34
2.1.1.3	Problème de l'enfoncement des pieds	35
2.1.2	Modélisation de la marche	36
2.1.2.1	La phase de simple support	36
2.1.2.2	la phase d'impact	37
2.1.3	Représentation d'état, système hybride avec effets impulsives([GAP01])	37
2.2	Description d'une marche passive stable	38
2.3	Cycle limite d'un système non linéaire	39
2.3.1	Définitions	39
2.3.2	Stabilité orbitale	40
2.4	Détermination du cycle limite hybride	40
2.4.1	L'application de Poincaré	41
2.4.2	Recherche du point fixe : l'algorithme de Newton Raphson	42
2.5	Analyse de la stabilité du cycle limite hybride:	43
2.5.1	Stabilité locale	43
2.5.2	Sensibilité de la trajectoire	44
2.5.2.1	Critère de la stabilité	44
2.5.2.2	Calcul de la matrice monodrome	45
2.6	Résultats numériques	46
2.6.1	Conditions de la simulation	46
2.6.2	Cycle limite passif du robot compas :	46
2.6.3	Stabilité du cycle limite passif du robot compas	48

2.6.4	Conclusion	48
3	Commandes basées sur la passivité pour des allures de marche stables et optimales	49
3.1	Introduction	49
3.2	Base théorique	50
3.2.1	Elements de géométrie différentielle	50
3.2.1.1	Définitions ([Mas00])	50
3.2.1.2	Proposition 3.1	51
3.2.2	Modélisation des systèmes mécaniques	51
3.2.2.1	Le formalisme Lagrangien	51
3.2.2.2	Le formalisme canonique ou Hamiltonien	52
3.2.3	Courbes intégrales et énergie	53
3.3	Allures pour différentes vitesses (Licer)	56
3.3.1	Préliminaires	56
3.3.1.1	Phase de simple support	57
3.3.1.2	Instants d'impact	57
3.3.1.3	Vitesse de progression et énergie	58
3.3.2	Résultat principal	58
3.3.3	Démonstration du théorème 3.1	59
3.3.3.1	Calcul de la commande de modelage de l'énergie	59
3.3.3.2	Phase de simple support	60
3.3.3.3	L'instant d'impact	61
3.3.3.4	Conclusion	62
3.3.4	Résultats de simulation	62
3.4	Allures pour différentes pentes (Spong)	65
3.4.1	Loi de commande	65
3.4.2	Résultats de simulation	66
3.5	Allures pour différentes pentes et vitesses (Combinaison des deux commandes Licer et Spong)	69
3.5.1	Résultat principal :	69
3.5.2	Démonstration :	69
3.5.3	Stabilité de la marche semi-passives :	70
3.5.4	Résultats de simulation :	71
3.6	Vitesse optimale pour une pente donné	73
3.6.1	Introduction	73

3.6.2	Fonction coût	74
3.6.3	Formulation du problème d'optimisation :	75
3.6.3.1	Préliminaires	75
3.6.3.2	Formulation du problème d'optimisation:	76
3.6.4	Approche de résolution :	76
3.6.5	Résultats de simulation :	77
3.7	Conclusion	78
4	Commandes basées sur la linéarisation exacte	81
4.1	Introduction	81
4.2	Linéarisation par feedback des systèmes non linéaires	82
4.2.1	Introduction	82
4.2.2	Exemple intuitive	83
4.2.3	Les systèmes sous la forme canonique	85
4.3	Linéarisation exacte par feedback du robot type compas	86
4.4	Suivi d'un cycle limite nominal pré-calculé	89
4.4.1	Loi de la commande	89
4.4.2	Analyse de la stabilité	89
4.4.2.1	Modèle complètement linéarisé	90
4.4.2.2	Stabilité orbitale	91
4.4.3	Résultat de simulation :	92
4.4.3.1	Suivi de la trajectoire de référence	92
4.4.3.2	Analyse de la stabilité	92
4.4.3.3	Robustesse face aux variations du vecteur initial	95
4.5	Réalisation en ligne d'une allure de marche périodiques	101
4.5.1	Définition d'une allure de marche	101
4.5.2	Approche de commande	102
4.5.2.1	Commande à énergie minimale	102
4.5.2.2	Commande linéaire quadratique en temps minimum	104
4.5.3	Analyse de la stabilité	110
4.5.3.1	Résultats de simulation	111
4.6	Conclusion	113
5	Robustesse des allures de marche face aux incertitudes paramétriques	115
5.1	Introduction	115
5.2	Notions de la robustesse	116
5.3	Approche multi-modèle	117

5.3.1	multi-modèle incertain	118
5.3.2	Forme normalisée de l'incertitude	118
5.3.3	Stabilité sur un sous ensemble de φ	119
5.3.4	Dilatation du domaine de variation des paramètres	120
5.3.5	La marge de robustesse	120
5.3.6	Critère de robustesse	121
5.4	Analyse de la robustesse du robot type-compass	121
5.4.1	Modèle normalisé	121
5.4.2	Propriété intéressante	123
5.4.3	Robustesse en stabilité face aux incertitudes de μ et β	124
5.4.3.1	Modèle incertain	124
5.4.3.2	Définition de la marge de robustesse des allures de marche : . . .	125
5.4.3.3	Méthode de Résolution	126
5.5	Simulations numériques	127
5.6	Conclusion	129
	Conclusion et perspectives	131
	Références bibliographiques	135

Liste des figures

1	Adaptation d'un robot marcheur aux différents types de terrain	5
2	Quelques exemples de prototypes de robots bipèdes : Spring Flamingo (a), Johnnie (b), Bip (c), Rabbit (d), Wabian-2 (e), HRP-2 (f), Pino (g), SDR-4X (h), Asimo (i)	9
1.1	Les différents phases du cycle de marche	19
1.2	Les principaux événements du cycle de marche	20
1.3	Placement des centres de gravité des segments du corps humain	21
1.4	Modèle mécanique d'étude	22
1.5	Déplacement vertical théorique du centre de gravité	22
1.6	Plans concernés par la marche humaine	23
1.7	Exemple de structure de robot bipède	25
1.8	Marche statique d'un robot bipède (dans le plan saggital)	31
2.1	Le robot bipède passif type-compas expérimenté par McGeer	34
2.2	Le robot bipède type-compas	35
2.3	Le bassin d'attraction d'un cycle limite stable	40
2.4	L'application de Poincaré dans le plan de phase	41
2.5	Cycle limite passif du robot compas sur une pente de 3°	47
3.1	Le robot type compas	56
3.2	Cycles limites pour différentes vitesses d'avancement (pente= 3 deg)	63
3.3	Evolution temporelle de l'angle de non support θ_{ns} pour différentes vitesses de progression (pente = 3 deg)	63
3.4	Evolution temporelle de la vitesse angulaire de non support $\dot{\theta}_{ns}$ pour différentes vitesses de progression (pente = 3 deg)	64
3.5	Signaux de commande pour différentes vitesses de progression (pente = 3 deg)	64
3.6	Energie mécanique du robot pour différentes vitesses de progression (pente = 3 deg)	65
3.7	Cycles limites de marche du robot type-compas pour différentes valeurs de pentes ($v = 0.734 m/s$)	67
3.8	Evolution temporelle de l'angle de non support θ_{ns} pour différentes pentes ($v = 0.734 m/s$)	67

3.9	Evolution temporelle de la vitesse angulaire de non support $\dot{\theta}_{ns}$ pour différentes pentes ($v = 0.734 m/s$)	68
3.10	Signaux de commande pour différentes pentes ($v = 0.734 m/s$)	68
3.11	Energie mécanique du robot pour différentes pente ($v = 0.734 m/s$)	69
3.12	Cycles limites du robot type-compass pour différentes vitesses et pentes	71
3.13	Evolution temporelle de l'angle de non support θ_{ns} pour différentes vitesses de progression et de pentes	72
3.14	Evolution temporelle de la vitesse angulaire de non support $\dot{\theta}_{ns}$ pour différentes vitesses de progression et différentes pentes.	72
3.15	Couples de commande pour différentes vitesses de progression et différentes pentes.	73
3.16	Energie mécanique du robot pour différentes vitesses de progression et différentes pentes	73
3.17	Le facteur de vitesse optimal en fonction de l'angle de la pente du sol	78
4.1	Régulation du niveau de liquide dans un réservoir	84
4.2	Linéarisation exacte du robot type-compass	88
4.3	Les positions articulaires de la trajectoire réelle et celles de la trajectoire désirée ($x(0) = x_{init}$)	93
4.4	Les vitesses articulaires de la trajectoire réelle et celles de la trajectoire désirée ($x(0) = x_{init}$)	93
4.5	L'évolution temporelle de l'erreur de suivi sur les positions articulaires $x(0) = x_{init}$	94
4.6	L'évolution temporelle de l'erreur de suivi sur les vitesses articulaires $x(0) = x_{init}$	94
4.7	Les couples de la commande Proportionnelle-dérivée pour $x(0) = x_{init}$	95
4.8	La trajectoire passive du robot dans le plan de phase avec $x(0)$ appartient a bassin d'attraction ($dev = 0.01$)	96
4.9	La trajectoire du robot soumis à une commande proportionnelle-dérivée, dans le plan de phase avec $x(0)$ appartient au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.01$)	96
4.10	Les couples de commande proportionnelle-dérivée avec $x(0)$ appartient au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.01$)	97
4.11	L'évolution de l'erreur de position avec $x(0)$ appartient au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.01$)	97
4.12	L'évolution temporelle de l'erreur de vitesse avec $x(0)$ appartient au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.01$)	98
4.13	La trajectoire passive du robot dans le plan de phase avec $x(0)$ n'appartient pas au bassin d'attraction ($dev = 0.035$)	98

4.14	La trajectoire du robot soumis à une commande proportionnelle-dérivée, dans le plan de phase avec $x(0)$ n'appartient pas au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.035$)	99
4.15	L'évolution de l'erreur de position avec $x(0)$ n'appartient pas au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.035$)	99
4.16	L'évolution de l'erreur de vitesse avec $x(0)$ n'appartient pas au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.035$)	100
4.17	Les couples de commande proportionnelle-dérivée avec $x(0)$ n'appartient pas au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.035$)	100
4.18	Définition d'une allure du robot type-compas en termes de facteurs caractéristiques de la marche	102
4.19	Approche de commande à énergie minimale pour la génération d'allures de marche périodiques	104
4.20	Le robot type compas : la période de pas minimal en fonction de la longueur de pas pour différente valeur de ρ	108
4.21	Le robot type-compas : la valeur du coût total J de la commande en fonction du paramètre ρ	108
4.22	Approche de Commande à énergie minimale en un minimum de temps pour la génération d'allures de marche périodiques d'un robot type-compas	109
4.23	Cycle limite du robot type compas réalisé par l'approche de commande à énergie minimale en un temps minimum ($L_{pas} = 0.6m$ et $T_{min} = 0.805m/s$)	112
4.24	Les positions articulaires de l'allure de marche réalisée par l'approche de commande à énergie minimale en un temps minimum ($L_{pas} = 0.6m$ et $T_{min} = 0.805m/s$)	112
4.25	Les vitesses articulaires de l'allure de marche réalisée par l'approche de commande à énergie minimale en un temps minimum ($L_{pas} = 0.6m$ et $T_{min} = 0.805m/s$)	113
4.26	Les couples de commande à énergie minimale en un temps minimum pour une allure de marche caractérisée par $L_{pas} = 0.6m$ et $T_{min} = 0.805m/s$	113
5.1	Valeurs propres de la matrice incertaine $A(p)$ pour des paramètres appartenant à un sous ensemble $\tilde{\varphi}$ du domaine de variation	119
5.2	La partie réelle maximale des valeurs propres de la matrice $A(p)$ en fonction du coefficient de dilatation r	121
5.3	Le robot type compas	122
5.4	Le comportement de la trajectoire du robot type compas face aux variations des valeurs des paramètres incertains μ et β	128

5.5	Module maximal des matrices monodromes associée à $M(\mu, \beta)_{\mu, \beta \in r\wp}$ en fonction du coefficient de dilatation r	128
-----	--	-----

Introduction

0.1 Robot et Robotique

L'Homme a toujours tenté de dépasser le règne animal auquel il appartient, et de créer la vie artificielle qui traîne une très vieille histoire derrière elle. L'idée de personnes artificielles remonte vraisemblablement aux légendes antiques, citant par exemple celle de Jason, Pygmalion ou Golem. A la renaissance, le premier schéma d'un robot humanoïde fut l'œuvre de Léonard de Vinci aux alentours de 1495. Les carnets de Vinci, redécouverts dans les années 1950, contenaient des dessins détaillés d'un chevalier mécanique qui était apparemment capable de se lever, balancer ses bras, et bouger sa tête et sa mâchoire.

Le premier robot opérationnel connu fut construit par Jacques de Vaucanson en 1738, qui créa un androïde (automate dont l'aspect évoque l'Homme) flûtiste, ainsi qu'un canard mécanique capable de manger et de déféquer.

Le mot robot a été inventé par l'écrivain tchèque Karel Capek en 1921, pour les besoins de sa pièce de théâtre RUR (Rossum's Universal Robot). Robot en tchèque signifie corvée, travail obligatoire. Avec RUR, Karel Capek met en scène le mythe du robot qui cherche à détrôner l'homme, en commençant par prendre la place des ouvriers dans les usines. On nomme "robot" un dispositif mécanique accomplissant automatiquement des tâches généralement dangereuses ou pénibles pour un humain.

Le terme robotique a été introduit dans la littérature par Isaac Asimov dans le livre Runaround (1942). Il y énonce les trois règles de la robotique qui deviendront par la suite les trois lois de la robotique :

- Première loi : un robot ne peut porter atteinte à un être humain ni, restant passif, laisser cet être humain exposé au danger.
- Deuxième loi : un robot doit obéir aux ordres donnés par les êtres humains, sauf si de tels ordres sont en contradiction avec la première loi.
- Troisième loi : un robot doit protéger son existence dans la mesure où cette protection n'est pas en contradiction avec la première ou la deuxième loi.

Depuis, les robots se sont multipliés et intensivement utilisés dans l'industrie, mais aussi dans le domaine militaire ou en milieu domestique où ils effectuent sans relâche des tâches répétitives

et avec rigueur. Par exemple, dans les chaînes de montage de l'industrie automobile, ils y remplacent les ouvriers dans les tâches pénibles et dangereuses (peinture, soudure, emboutissage, etc.).

0.2 Robot et autonomie

Le terme robot correspond à un type bien précis de système. Ainsi, si certaines caractéristiques ne sont pas présentes, une machine, même très complexe, ne peut être qualifiée de robot. La définition la plus précise du robot pourrait être : système automatique mécanisé capable d'effectuer une ou plusieurs tâches dans un environnement donné, de manière autonome et séquentielle, par l'exécution d'un programme pré-établi. Selon cette définition, une machine aussi complexe qu'un avion long-courrier Airbus, par exemple, n'est pas un robot, alors qu'un banal grille-pain peut, lui, être considéré comme la forme la plus simple de robot. En effet, un avion de ligne, bien qu'embarquant de nombreux appareils automatiques et constituant un très complexe ensemble de systèmes associés, reste sous le contrôle des pilotes qui demeurent en haut de la pyramide hiérarchique des systèmes. Du décollage à l'atterrissage, l'appareil est gouverné et n'exécute pas un programme lui permettant d'accomplir sa tâche. En revanche, le grille-pain va effectuer, une fois démarré, une tâche certes unique et très simple, mais de façon entièrement autonome et sans aucune intervention extérieure, exécutant un programme, une suite d'instructions : le thermostat, qui coupe le circuit dès qu'une certaine température est atteinte, et que l'on règle en vue d'une durée plus ou moins longue de cuisson, peut être considéré comme unité d'entrée, tandis que ce réglage lui-même peut être considérée comme la saisie du programme à exécuter.

Ainsi, l'on cherche à réaliser des systèmes capables de réagir seuls à l'environnement, c'est-à-dire à un certain imprévu. Et c'est ce plus ou moins grand degré d'autonomie (d'autres aiment mieux dire intelligence artificielle) qui rapproche les robots des systèmes complètement autonomes envisagés par la science-fiction et la recherche de pointe. Une certaine capacité d'adaptation à un environnement inconnu peut, dans les systèmes semi-autonomes actuels, être assurée, pourvu que l'inconnu reste relativement prévisible: l'exemple déjà opérationnel de l'aspirateur-robot en est une parfaite illustration. L'autonomie suppose que le programme d'instructions prévoit la survenue de certains événements, puis la ou les réactions appropriées à ceux-ci. La plupart des robots autonomes étant mobiles, il convient de leur fournir un apport énergétique.

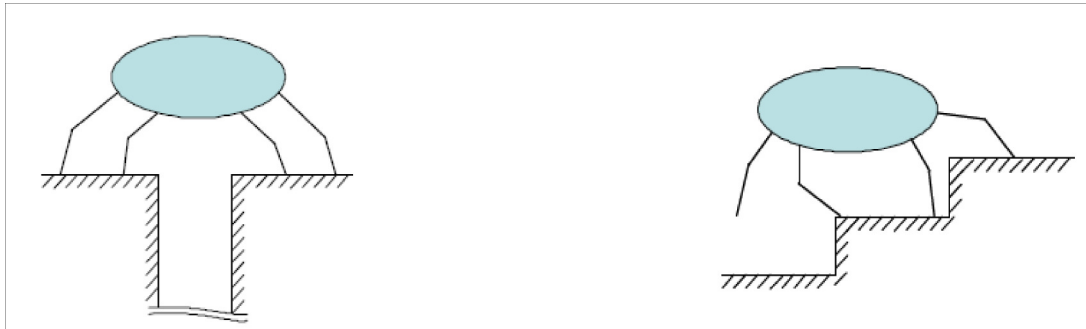


Figure 1: Adaptation d'un robot marcheur aux différents types de terrain

0.3 Robots à pattes

Les mécaniques de robots sont généralement conçues en fonction des applications et tâches auxquelles on les destine. Par exemple, en milieu manufacturier, les bras manipulateurs sont les plus répandus pour des fins d'assemblage et de manutention. Alors que, pour les applications de transport et de service, on est le plus souvent amené à utiliser des robots mobiles sur roues. Ces derniers sont intéressants de point de vue facilité de mise en oeuvre et capacité de transporter de lourdes charges. Cependant, les véhicules à roues nécessitent des terrains aménagés dotés de routes ou de rails et sont incapables de fréquenter des milieux irréguliers ou parsemés d'obstacles d'où le besoin de réfléchir à d'autres modes de locomotion, si on veut que la nature du terrain ne présente plus une entrave pour le déplacement du robot.

La solution à ce problème n'est pas loin, elle est inspirée de la nature autour de nous. Ainsi, un grand nombre de roboticiens se sont intéressés à la locomotion humaine et animale utilisant des pattes. En effet, les robots à pattes (bipèdes, quadrupèdes) ont des avantages certains sur les robots mobiles à roues : ils offrent une manoeuvrabilité et une rapidité supérieures dans des environnements irréguliers (escaliers, pentes, terrains encombrés...), car le contact entre le robot et le sol est un contact intermittent et non permanent comme celui des roues, ce qui permet au robot de franchir des obstacles et lui confère une haute mobilité en milieu encombré ou chaotique (figure 1), d'où d'éventuelles applications notamment dans le domaine d'intervention en milieu hostile. (nucléaire, maritimes ou encore spatial).

L'étude des robots à pattes a été menée depuis plusieurs décennies. La tendance étant de copier la flexibilité, la robustesse et l'adaptabilité des êtres marcheurs. C'est une problématique difficile, en partie à cause de la puissance de calcul nécessaire et de la complexité des modèles. Ce qui explique que ces types de robots soient encore largement cantonnés aux expérimentations de laboratoires et très peu utilisés dans la vie pratique.

0.4 Robot bipède

Le robot bipède est considéré comme le plus agile parmi les robots marcheurs puisqu'il imite la marche humaine; dont la souplesse et l'efficacité achevée en font le modèle par excellence de la locomotion à pattes. Ainsi, ce type de robot recueille une grande attention à travers le monde et on assiste à une intensification de la recherche sur la locomotion bipède. Bien que l'étude des robots bipèdes reste difficile vu qu'ils ne sont pas statiquement stables comme leurs homologues quadripèdes ou hexapodes, les avantages qu'ils présentent sont considérables :

- Domaines médicale : Si les relevées biologiques de la marche humaine sont une source d'inspiration pour la robotique bipale, en contre partie l'étude théorique et la mise en pratique des robots à deux pattes est un moyen précieux pour mieux comprendre les mécanismes de la marche humaine et peut aider à réaliser des prothèses et des orthèses intelligents pour les personnes handicapées.
- Intervention en milieu hostile : démantèlement des réacteurs nucléaires, exploration spatiale ou maritime.
- Domaine militaire : un robot à deux pattes assez accompli et autonome peut remplacer les soldats humains et participer activement aux batailles terrestres (robot fantassin) ou au démantèlement des champs minés;
- Applications domestiques et ludiques : Dans un futur proche, le robot humanoïde peut être amené à exécuter les tâches ménagères répétitives et ennuyeuses et faire ainsi gagner le temps aux humains. Enfin, les robots jouets font partie des applications ludiques de la robotique à pattes.

0.5 Réalisations actuelles

Depuis les années 70, des centaines de prototypes de robots bipèdes ont été construits à travers le monde, et particulièrement au Japon. Les robots réalisés servent, dans la majorité de cas, de plateformes de recherche dans les laboratoires, Seuls quelques robots de type humanoïde (dont la morphologie se rapproche de celle de l'être humain) sont destinés à la commercialisation.

Dans ce qui suit, nous allons présenter une liste non exhaustive de prototypes et de robots humanoïdes dans le monde.

- Vers la fin des années 90, Spring Flamingo : une plate forme expérimental de robot bipède planaire à six degrés de liberté, a été développé par le professeur Jerry Pratt du laboratoire MIT Leg Laboratory. Le robot est capable d'adopter une marche d'oiseau pour des vitesses supérieures à 1.25 m/s (pour plus d'information sur ce robot.

- A la même époque, à l'université de Munich, Le robot bipède Johnnie voit le jour. C'est un prototype 3D, à 23 degrés de liberté, capable de se déplacer avec une vitesse de marche de 0.4 m/sec.
- Le robot bipède BIp a été développé au sein du laboratoire de mécanique des solides de Poitiers (LMS) et de l'institut nationale de recherche en automatique et informatique de Grenoble (INRIA) au sein du projet de recherche qui a été lancé en 1994. Il sert de plateforme pour mettre en oeuvre de nouvelles techniques de contrôle/ commande. Il mesure 180 cm et pèse 105 kg, le robot bipède BIP 2000 a 17 degrés de liberté dotée de 2 jambes, d'un pelvis, d'un tronc, et équipé de détecteurs internes et externes. Il peut marcher sur un sol plat horizontal ou légèrement incliné, monter ou descendre des escaliers, tourner, et adopter un certain nombre de postures anthropomorphes. (<http://www-lms.univ-poitiers.fr/robot/BIP.html>)
- Un ensemble de laboratoires français se sont réunis dans un groupe de recherche intitulé ROBEA (Robotique et Entités Artificielles) soutenu par le CNRS. L'objectif était de développer des méthodes et des outils théoriques pour faire marcher et courir un robot bipède et les valider expérimentalement. Ainsi, un nouveau prototype expérimental a été entièrement conçu au sein du groupe de recherche et construit par une société indépendante : RABBIT : Il mesure 100 cm et 35 kg et adopte une marche dynamique (<http://robot-rabbit.lag.ensieg.inpg.fr/index.php>).
- Le robot wabian III (wabian 3) à été construit à l'Université Waseda de Tokyo, Le premier robot de cette lignée date de 1972, il pèse 130 kg. Le travail principal avec ce robot porte sur la marche, Il a 43 degrés de libertés. La marche est basée sur le contrôle du moment nul (<http://www.takanishi.mech.waseda.ac.jp/research/index.htm>)
- The Humanoid Robotics Project a été conçu par Kawada avec les appuis de AIST (National Institute of Advanced Industrial Science and Technology). Le but est de développer un robot humanoïde capable d'aider l'homme et de réaliser des tâches ouvrières. Ce robot est certainement l'un des humanoïdes les plus sveltes avec un poids de 58 kg pour 1m54. Outre les alliages légers, cela a été rendu possible grâce à la forte concentration de l'électronique. Et malgré ce poids plume, il est capable de porter des objets de 6 kg et son autonomie est de 2 heures.
- Le robot humanoïde Pino a été développé par un groupe de chercheurs Japonnais sur une idée de professeur Kitano (Symbiotic System Project) . Il mesure 70 cm et 5.5 kg et possède une structure à 26 degrés de liberté lui permettant de garder son équilibre et de prendre différentes poses.. Ses mouvements sont générés par un programme en langage C. Il est déjà commercialisée à des fins domestiques et sert de prototype pour les organismes de recherche, les universités et les musées de science (<http://www.zmp.co.jp>)

- Le robot humanoïde QRIO (SDR-4X) de l'entreprise Sony est capable de marcher même sur un sol relativement irrégulier, danser, identifier les objets environnants, certaines visages et voix mais aussi d'avoir des conversations simples. Il a été conçu essentiellement à des fins ludiques. Il mesure 56 cm et pèse 6.5 kg. Il possède 28 degrés de liberté. Le robot SDR-4X est la dernière version de QRIO. Il présente une supériorité du point de la commande et la capacité de communication avec les humains.

(http://www.sony.net/SonyInfo/QRIO/top_nf.html).

- Après des générations successives de robots bipèdes marcheurs (depuis 1986), la maison Honda lance le robot Asimo (Advanced Step in Innovative Mobility) reconnu comme étant le robot humanoïde le plus abouti ([HHHT98]). Le dernier modèle d'ASIMO qui date de décembre 2005 est caractérisé par un poids de 54 kg et une hauteur de 130cm. Les membres locomoteurs possèdent 18 degrés de liberté et le robot en compte 38. En plus des capacités déjà présente dans les premiers modèles : marcher, tourner et monter les escaliers et danser, la nouvelle version développe une meilleure interactivité avec l'homme et sa vitesse de course atteint 6km/h avec une autonomie énergétique de 40min. De plus amples informations sur ce robot peuvent être trouvés dans le site (<http://world.honda.com/ASIMO>)

La figure 2 expose les différentes réalisations du robot bipèdes cités précédemment.

Pour un historique plus détaillé sur les différentes réalisations, le lecteur peut se référer à <http://staff.aist.go.jp/s.kajita/bipedsite-e.html> ou <http://www.vieartificielle.com/robotheque/>

Aujourd'hui, la marche robotique est loin d'être maîtrisée, En effet, malgré de tâches variées que peuvent faire les robots bipèdes réalisés jusqu'à présent, Ces mécanismes manquent d'aisance et d'autonomie. En plus, dans les modèles les plus aboutis, la stabilité des trajectoires est étudiée par le critère du point de moment zéro (ZMP). Bien que ce dernier soit considéré comme un critère de stabilité dynamique, il est restrictif par rapport à la rapidité des mouvements et à la structure du robot (robot avec pieds), En outre, ce critère est complètement inopérant dans certaines phases de locomotion lorsque aucun pied n'est en contact avec le sol (phase de vol pendant la course ou le saut).

0.6 Approches de commande

Le contrôle d'un robot marcheur bipède consiste à trouver des lois de commande susceptibles de coordonner les mouvements des différents membres de la structure mécanique articulée ([MBSS97]). Ceci permet au robot de se déplacer sur la surface de marche. De part sa complexité et sa richesse, cette tâche attire de plus en plus de chercheurs qui s'intéressent au développement de nouvelles approches de commande pour de tels systèmes.

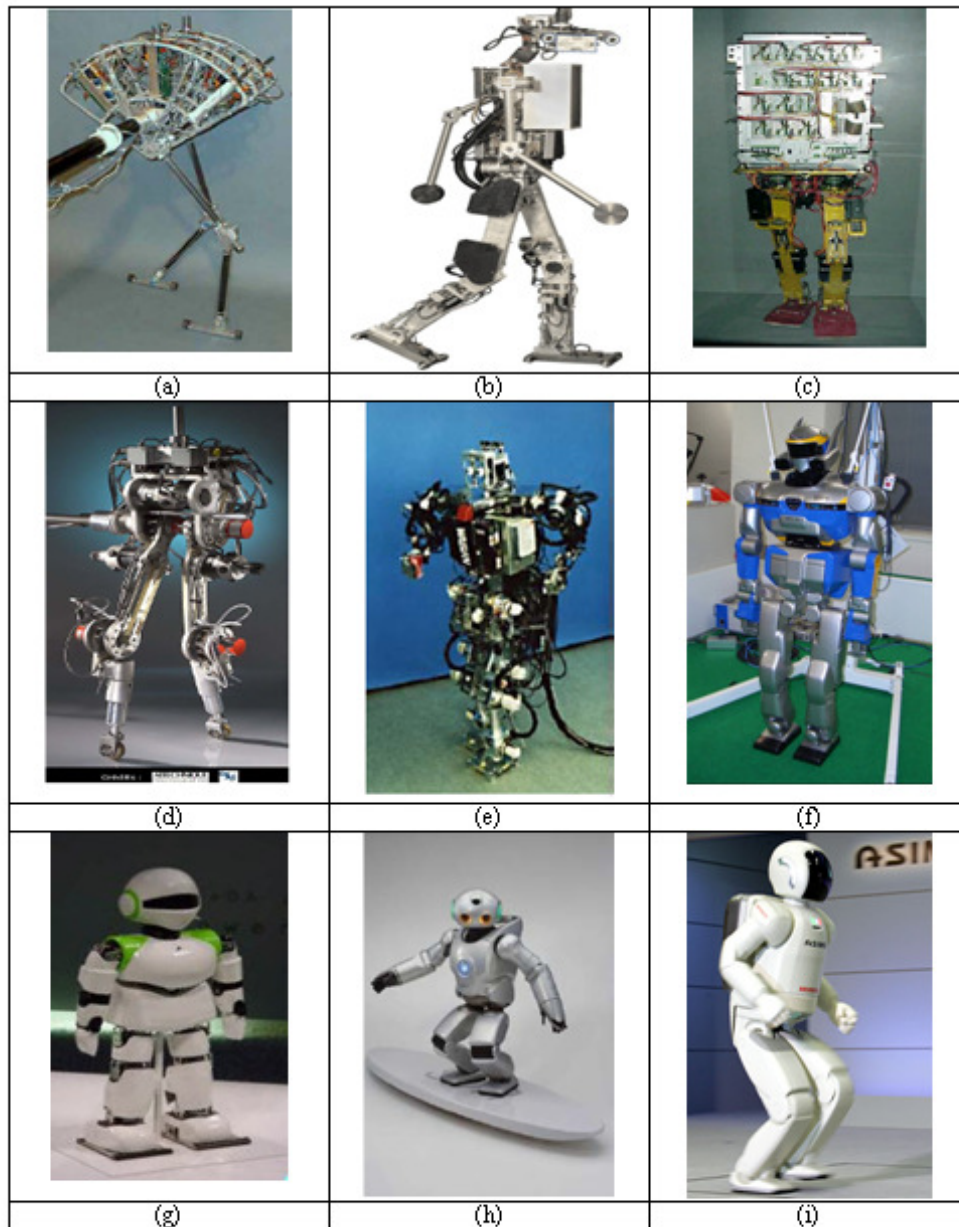


Figure 2: Quelques exemples de prototypes de robots bipèdes : Spring Flamingo (a), Johnnie (b), Bip (c), Rabbit (d), Wabian-2 (e), HRP-2 (f), Pino (g), SDR-4X (h), Asimo (i)

L'étude des robots bipède est encore à ses débuts vu les différentes problématiques qu'elles rencontre :

- la dynamique fortement non linéaire du système ;
- les redondances cinématiques et le nombre élevé de degrés de liberté qui rendant les mouvements difficiles à gérer ;
- la structure variable du modèle selon la phase en cours (simple ou double support). Cette variation se traduit par l'ajout/suppression de contraintes algébriques traduisant le contact avec le sol. Ceci se traduit par un sous-actionnement ou un sur-actionnement selon que l'on soit en phase de simple ou de double support ;
- La gestion des impacts avec le sol introduisant des discontinuités (sauts ou variations instantanées) sur le vecteur d'état du système ;
- Le problème de sous-actionnement qui peut survenir pendant certaines phases du cycle de marche, dû à un nombre de degrés de liberté supérieur au nombre d'actionneurs ;
- Le contact avec le sol, qui englobe des problèmes qu'il faut gérer aussi, comme le non glissement sur la surface de marche ;
- La stabilité pendant la marche, qui n'est pas évidente à assurer (surtout à priori), elle pourra être définie mathématiquement comme étant la capacité du système bouclé à rester indéfiniment dans une certaine région (appelée par certains auteurs : domaine de viabilité [Wei00]), traduisant l'absence de chute).

Les chercheurs ont abordé de façons différentes ces multiples problématiques. Pour chaque point, ils ont émis des hypothèses plus ou moins simplificatrices.

On peut constater alors, qu'une variété d'approches de commande ont été étudiés pour différents modèles de robots bipèdes. Par conséquent, il sera difficile de comparer d'une façon directe les résultats de simulation ou d'expérimentation des travaux de recherche puisqu'ils sont tirés de prototypes différents.

D'une façon générale, il est possible de classifier les approches utilisées pour générer une marche stable d'un robot bipède en deux grandes catégories :

0.6.1 Suivi de trajectoire pré-calculée

Cette approche est classique en robotique. Elle consiste d'abord à calculer hors ligne des trajectoires de référence périodiques qui décrivent l'évolution temporelles des coordonnées articulaires ([OLC03]). Ensuite, à appliquer une commande adéquate pour les stabiliser afin de reproduire une allure de marche ou de course spécifique. Ces trajectoires peuvent être de différents types : Certains chercheurs se sont inspirés des relevés biomécaniques de la marche humaine afin de définir une évolution adaptée aux articulations du robot (voir [HF77],[MBSS90] et [ZR79]). D'autres ont utilisé des générateurs d'allures qui créent des marches cycliques par l'introduction

d'oscillateurs stables ([Zie97]). Les efforts à appliquer aux actionneurs sont alors calculés par le modèle dynamique inverse (Computed torque control). Le suivi des trajectoire peut être ainsi réalisée par une commande locale comme le proportionnelle dérivée ([CAO94]). En outre l'approche par régulation de la position du point à moments nuls noté ZMP ([Vuk70], [MBSS90] et [MVS01]) est exploité pour vérifier la stabilité de la marche ([SY95]) puisque la commande du suivi de trajectoire stabilisent les articulations et non pas le robot en entier.

Cependant, comme la dynamique du mouvement n'est déterminée qu'à posteriori, cette démarche peut conduire à des solutions peu satisfaisantes du point de vue dépenses énergétiques au niveau des actionneurs. Une solution à ce problème consiste à définir des trajectoires qui minimisent l'énergie nécessaire pour générer le mouvement de marche, et ce par optimisation d'un critère directement lié aux dépenses énergétiques du robot.(voir par exemple [RG98],[Rou98], [AF00], [CY01], [GAP01]).La commande est conçu ensuite pour assurer la poursuite de ces trajectoire de référence. En outre, la régulation de la position du point à moments nuls noté ZMP ([Vuk70], [MBSS90] et [MVS01]) est exploité pour verifiser la stabilité de la marche puisque la commande du suivi de trajectoire stabilisent les articulation et non pas le robot en entier.

Par ailleurs, un inconvénient majeur de cette approche est sa lourdeur à mettre en place. En effet, elle requiert la détermination préalable et le stockage en mémoire, pour chaque paramètre applicatif (vitesse d'avancement désirée, nature et géométrie du sol ...), de l'ensemble des points constitutifs de la trajectoire à suivre.

0.6.2 Stabilisation de trajectoires cycliques

Cette deuxième catégorie, plus originale consiste à poser le problème de commande en terme de stabilisation de trajectoires cycliques en boucle fermée. En fait, les tâches de génération de trajectoire et de commande sont confondues. Ceci conduit à considérer l'espace de phase du système dans lequel la trajectoire articulaire est décrite par une courbe fermée appelée cycle limite. Le caractère cyclique de la marche est étudié à l'aide d'une section de Poincaré qui fait le lien entre les conditions initiales de deux pas consécutives. Par conséquent, l'étude le cycle limite se réduit à l'étude d'un point dans la section de Poincaré ([GAP01],[His01]). Ces cycles limites sont stabilisés par le biais des commandes constantes par morceaux ou impulsives recalculées à chaque début de cycle. On distingue deux types de trajectoires :

- Trajectoire cyclique forcée : la trajectoire est décrite en terme de contraintes à satisfaire dans l'espace cartésien ou articulaire ensuite, elles stabilisée par le biais d'une commande adéquate telle que la par mode glissant ([CH93]) ou une commande à temps fini ([GAP01]).
- Trajectoire issue de cycle limite naturel : un cycle limite naturel résulte de la dynamique intrinsèque de robot compas. Il caractérise marche passive (sans actionnement).

0.7 la marche passive

La marche passive est définie pour les robots à pattes raides. Dans ce type de marche, la dissipation de l'énergie due aux impacts est compensée par l'énergie potentielle générée par la marche sur une pente descendante. Cette notion a été introduite par Tad McGeer en 1990 ([McG90b],[McG90c] et [McG90a]) qui a démontré, en utilisant le modélisé tangent pour des structures de robots plans simples (avec et sans genoux), que sous la seule action de la gravité, le robot peut effectuer une marche naturelle et stable sur des petites pentes.

Depuis, la marche passive a été exploitée par de nombreux chercheurs; Ils ont mis en évidence des allures de marche stables pour des prototypes modèles plus ou moins complexes de robots bipèdes, incluant les bipèdes tridimensionnels dotés de genoux et/ou de bras.

Dans [GCRC98], Garcia, Ruina et al. ont étudié la marche passive d'un robot type compas en utilisant son modèle dynamique complet. Pour de petites pentes, ils ont développé une méthode analytique basée sur l'approximation du premier et deuxième ordre pour la détermination de cycles limites passifs.

Des exemples de prototypes de robots passifs ont été développés à Massachusetts Institute of Technology et Cornell University. Bien que ces robots ne disposent d'aucune motorisation articulaire, elle peuvent marcher sur des petites pentes avec des allures qui ressemblent beaucoup à la marche humaine.

Cependant, il a été démontré, pour des valeurs de pentes assez grandes ou sur un sol plat, que ces modèles ne peuvent pas avoir des allures de marche stables sans aucune action extérieure. En effet, Goswami ([GTE98]) a démontré l'existence de phénomène de bifurcations (ou dédoublement de période) et des allures chaotiques pour de grandes valeurs de pentes. Par conséquent, pour faire marcher le bipède dans de telles pentes il est nécessaire d'introduire une commande active.

Ainsi, Un groupe de chercheurs américains ont réussi à construire des prototypes de robots bipèdes tridimensionnels actionnés et basés sur la notion de la marche passive. Ils tentent de remplacer la force de gravitation par une simple actuation, aboutissant ainsi à des allures de marche, sur un terrain plat, naturelles et optimales en dépenses énergétiques ([CWR01], [CRTW05]) :

Asano et al. ([AYF00]) ont proposé une approche pour faire marcher le robot compas sur un plan horizontal. L'idée est d'introduire, par des couples moteurs, un champ de gravité virtuelle au robot, qui reproduit les phénomènes dû à la gravité lors d'une marche passive. La commande est calculé de façon à assurer un certain niveau d'énergie virtuelle qu'on peut modifier pour avoir une marche multi-allures pour un champ de vitesse désirée, on applique la commande qui assure le niveau d'énergie nécessaire ce qui permet de changer aisément la vitesse d'avancement

du robot au cours de la marche et obtenir une marche (multi-allures) en modifiant son énergie virtuelle. L'approche a été appliquée avec succès pour faire passer le robot d'un mouvement lent à un autre rapide.

Dans [yA01] Les auteurs ont appliqué la même approche pour définir des allures de marche à différentes vitesses sur un sol plat d'un robot avec genoux. Le suivi de ces trajectoires est assuré par la commande passive utilisant les champs de vecteurs : PVFC, *Passive velocity field control* ([LH99]). L'avantage de la commande PVFC est qu'elle préserve la passivité du système. Cependant, selon les auteurs, l'approche n'est pas valable pour de grandes valeurs de l'angle virtuel, à cause du phénomène des bifurcations qui aboutit à un comportement chaotique du robot. Ce phénomène est similaire à celui des allures de marche purement passive ([GTE98])

Alors que Wischmann et al. ont conçu une commande basée sur les réseaux de neurones qui permet à un robot bipède de marcher sur un sol plat tout en minimisant sa consommation d'énergie, le robot bipède utilisé dans la simulation a été conçu de telle façon qu'ils soit capable d'avoir des allures passives stable sur de petites pentes ([WP04])

Pour le robot compas, Goswami et al ont démontré que l'allure périodique passif peut être totalement caractérisé par l'angle de la pente de la surface de marche . En plus Pour chaque valeur de pente, ils ont développé une commande énergétique intuitive basée sur la passivité ([Ker97]). Cette commande permet de stabiliser le cycle limite passif, générer de nouveaux cycles actifs caractérisés par un certain niveau d'énergie proches de l'énergie du cycle passif ou faire une adaptation de la vitesse du robot. Cependant, on note que cette commande nécessite une grande valeur de couple moteur pour chaque actionneur dans le cas ou le robot marche dans un sol plat.

La notion de marche passive a été aussi exploitée pour un robot bipède plan à sept degrés de liberté : avec tronc et genoux ([Khr04])

Pour des robots tridimensionnels à n degrés de liberté, Spong ([SB02]) a développé une commande qui modifie l'énergie potentielle du robot de telle façon à rendre les allures périodiques stables invariantes par changement de pentes. En effet, il a montré qu'à partir d'un cycle limite passif de référence, on peut déterminer de nouveaux cycles limites actifs pour différentes valeurs de pente en appliquant une commande qui permet de compenser la gravité générées par la nouvelle inclinaison du sol. En plus dans [SB03] il utilise une commande basée sur l'énergie pour stabiliser les allures trouvées en élargissant leurs bassins d'attractions. Dans son mémoire de Master ([Bha02]), Bhatia a appliqué avec succès ces commandes sur différents types de robot : un robot type compas, un autre muni de tronc et un troisième avec genoux. Il a même montré la robustesse de la commande énergétique par rapport aux perturbations par des exemples de simulation.

0.8 Contributions

En s'inspirant de ces différents travaux de recherche, nous nous proposons d'apporter une petite contribution dans la réalisations de trajectoires de marche stables des robots bipèdes en boucle fermée avec notion d'optimalité. Le robot bipède que nous allons étudier est très simple : c'est un robot type compas rigide complètement actionné. Il possède deux degrés de liberté et deux actionneurs au niveau de la hanche et de la cheville : c'est le même que celui étudié par Goswami et al dans [AGE96].

Dans ce travail de thèse, nous avons développé deux approches de commandes différentes :

- La première approche est basée sur la passivité. Elle consiste à exploiter la dynamique intrinsèque du robot pour générer des allures de marche semi-passives. L'approche a permis de traiter les points suivants :
 - Développement d'une procédure analytique pour prouver l'existence de cycles limites actifs pour un robot bipède type-compas.
 - Détermination de nouvelles allures de marche stables caractérisées par des vitesses d'avancement différentes.
 - Calcul de la vitesse de marche optimale que doit adopter le robot compas pour marcher sur un terrain d'inclinaison donnée.
- La deuxième est basée sur la linéarisation exacte du système. Elle permet d'appliquer des lois de commande normalement destinées au cas des systèmes linéaires et qui se caractérisent par leur simplicité et leur efficacité. Les points traités avec cette technique sont les suivants :
 - Suivi d'une allure de marche précalculée en utilisant une commande classique proportionnelle dérivée
 - Réalisation d'allures de marche avec des caractéristiques de marche souhaitées en utilisant la commande à énergie minimale en un temps minimum.
 - Etude de la stabilité de ces différents allures.
 - Analyse de la robustesse de la commande face aux perturbations paramétriques.

0.9 Organisation du mémoire

Nous avons choisi d'organiser notre mémoire en cinq chapitres :

Chapitre 1 - Analyse de la marche bipodale de l'homme au robot

Dans ce chapitre, d'abord, on présente une analyse brève de la marche humaine qui constitue un modèle de base de la marche robotique. Ensuite, on introduit les modèles nécessaires pour la mise en équation de la locomotion d'un robot bipède ainsi que les différentes formulations possibles.

Chapitre 2 - La marche robotique passive

La marche passive robotique sera abordée dans ce chapitre. On va exposer les différents outils théoriques nécessaires pour l'étude de ce type de marche. Des résultats de simulation seront présentés pour la validation des méthodes d'analyse sur un robot bipède type-compas marchant sur un sol incliné

Chapitre 3 - Commandes basées sur la passivité pour des allures de marche stables et optimales

Ce chapitre expose des approches de commandes basées sur la passivité qui permettent de mettre en évidence des allures périodiques du robot compas. La première est développée par l'auteur. Elle permet de générer des cycle limites pour des vitesses d'avancement du robot désirées. Alors que la deuxième approche est conçue par Spong. Elle rend le cycle limite insensible aux variations de l'angle de l'inclinaison du support de marche. Ce chapitre propose également une procédure d'optimisation de la marche par minimisation d'un critère énergétique. En se basant sur la combinaison des deux commande pré-citées, elle détermine la vitesse optimale correspondante à chaque valeur de pente.

Chapitre 4 - Commandes basées sur la linéarisation exacte

Deux approches de commande basées sur la linéarisation exacte du robot seront développées dans ce chapitre : La première est classique. Elle utilise un régulateur proportionnel dérivé et elle permet d'assurer le suivi des trajectoires de marche pré-calculées mais aussi d'augmenter considérablement leur robustesse face à d'éventuelles variations des conditions initiales. La seconde approche utilise la commande à énergie minimale qui fait subir aux articulations du robot une trajectoire cyclique correspondant à des caractéristiques de marche choisies tout en minimisant les dépenses énergétique, A cette commande, nous allons associer le problème de minimisation de la période de marche par optimisation d'un critère linéaire quadratique. Ce qui va permettre de concevoir des allures de marche rapides du robot type compas.

Chapitre 5 -Robustesse des allures de marche face aux incertitudes paramétriques

Dans ce chapitre, une approche multimodèle reposant sur la technique de balayage paramétrique est utilisée pour analyser la robustesse des trajectoires générée par la commande à énergie minimale face au variations des paramètres normalisés du robot type-compas.

Conclusion générale et Perspectives : Les contributions de ce travail ainsi que les améliorations qu'on pourra apporter font l'objet de ce chapitre.

Chapitre 1

Analyse de la Marche bipodale de l'homme au robot

Une étape essentielle dans l'étude des robots bipèdes consiste à analyser la marche humaine. En effet, Compte-tenu de la perfection avec laquelle l'homme marche et l'extraordinaire panoplie d'acteurs biologiques mis en jeu à cette fin (L'unité locomotrice humaine utilise 29 degrés de liberté, et nécessite l'action de 48 muscles par jambe), ce dernier constitue l'exemple par excellence de la bipédie.

Dans ce chapitre nous allons d'abord présenter une description concise des mécanismes de la marche humaine ([CAI94]), afin de pouvoir comprendre les divers phénomènes physiques mis en jeu par cette activité. Par la suite, les principes de base et les étapes de modélisation d'une marche robotique bipodale seront posés et discutés.

1.1 La marche humaine

La marche est une activité que l'homme valide imagine simple car il l'exécute sans être obligé d'y penser. Elle est cependant d'une grande complexité. C'est la combinaison dans le temps et dans l'espace de mouvements complexes des segments du corps, entraînant le déplacement sur un plan horizontal.

Parmi les mammifères marcheurs bipèdes, l'homme est le seul à adopter l'attitude érigée comme sa position naturelle. Les mains sont libérées de toute fonction locomotrice. La marche est constituée d'une activité alternée des membres inférieurs, caractérisée par une succession de double-appuis et d'appuis unilatéraux et un maintien de l'équilibre dynamique. Ainsi, l'appui est uniquement podal : à tout instant, il y a contact d'au moins un pied avec le sol. Les muscles et le système ostéoarticulaire sont les acteurs de la marche, dirigée par une commande centrale provenant du cerveau à travers les nerfs périphériques.

Les deux éléments indispensables pour toute forme de marche bipodale sont:

- La périodicité du mouvement de chaque pied d'une position de support à une autre dans le sens de la progression.
- La continuité des forces de réaction du sol qui supportent le corps (hypothèse liée à la marche, mais à exclure pour la course).

1.1.1 Les paramètres de la marche

- **Le pas** est l'intervalle séparant deux appuis au sol du même pied. En pratique, on le définit plutôt par deux contacts talonniers successifs du même pied.
- **Le demi-pas** est l'intervalle séparant le contact talonnier d'un pied et celui de l'autre pied.
- **La longueur du pas** est la distance séparant les deux talons lors du double appui. Il serait plus juste de parler de la longueur du demi-pas.
- **La largeur du pas** est la distance séparant le talon de la ligne de marche : sa valeur moyenne est de cinq à six centimètres.
- **La cadence de marche** est le nombre de pas effectués en une minute.
- **La vitesse de marche** est la distance parcourue par unité de temps. C'est aussi le produit de la longueur moyenne du pas par la cadence.

1.1.2 Le cycle de marche

La nature périodique de la marche bipodale nous permet de réduire notre étude à celle d'un seul cycle de marche. Le cycle de marche est constitué de deux phases : phase d'appui et phase de balancement qui sont elles mêmes composées d'une alternance de sous-phases de simple support (un seul pied au sol) et de double support (deux pieds au sol). Pour la marche humaine, le simple support représente 70 à 80% d'un cycle de marche, alors que le double support n'en représente que 20 à 30%. (figure 1.1)

1.1.2.1 La phase d'appui

Elle débute par l'attaque du talon (heel-strike), puis l'avant-pied se rabat et la plante toute entière entre en contact avec le sol.

- Le double appui antérieur de réception : le membre, qui passe d'avant en arrière, en recevant le poids du corps, absorbe l'énergie cinétique ainsi constituée : la hanche et le genou se fléchissent de quelques degrés lors du contact talonnier, La cheville se met en flexion plantaire de 5 degrés environ après l'attaque du talon. Le corps bascule du côté du membre recevant le poids du corps.

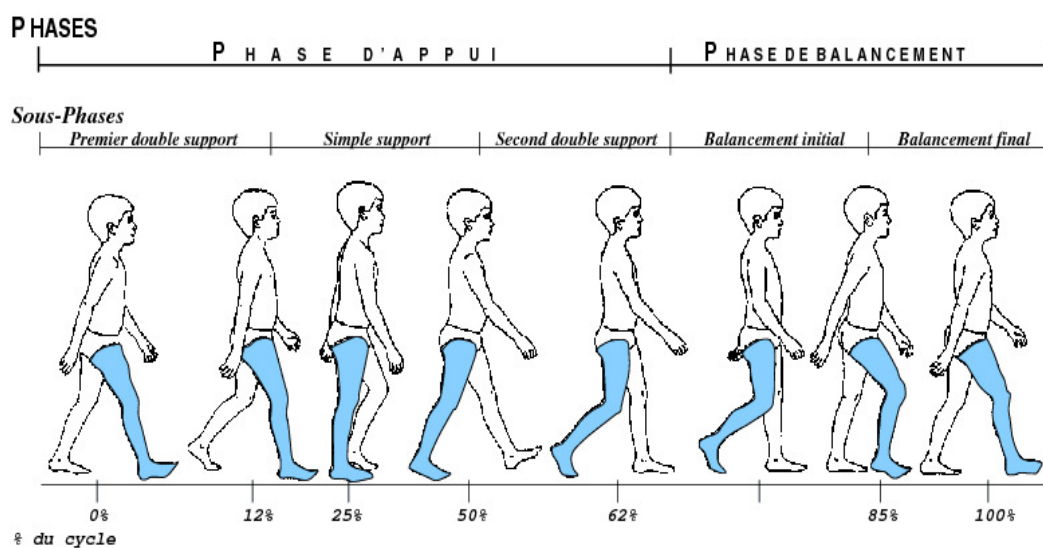


Figure 1.1: Les différents phases du cycle de marche

- L'appui unilatéral : pied à plat, le corps est en équilibre dans les trois plans de l'espace. La hanche, qui était fléchie, se redresse et s'étend. Le genou fléchit, puis se redresse.

1.1.2.2 La phase oscillante (phase de balancement)

- Le double appui postérieur d'élan : le membre situé en arrière propulse le corps en avant, il s'incline vers l'avant dans le plan sagittal, par une flexion du genou et de la hanche. La cheville passe en flexion plantaire d'environ 15 degrés, juste avant que le gros orteil ne décolle du sol (toe-off).
- La phase oscillante proprement dite : le membre postérieur se détache du sol et oscille d'arrière en avant. Dans le plan sagittal, le pied se relève sous l'action du jambier antérieur. Pour faciliter le passage du pas, l'extenseur commun des orteils et l'extenseur propre du gros orteil se contractent. Le genou fléchit sous l'action des fléchisseurs du genou. Le membre inférieur croise celui posé au sol. La cheville revient à zéro degré de flexion plantaire et dorsale juste avant l'attaque du talon suivant

La figure (1.2) expose les principaux événements qui se produisent pendant le cycle de marche selon D'ANGELI-CHEVASSUT et GAVIRIA .

1.1.3 Marche et équilibre

Pour l'être humain, le maintien de l'équilibre en station debout nécessite la mise en jeu de forces musculaires qui stabilisent le corps dans une posture lui permettant d'éviter la chute.

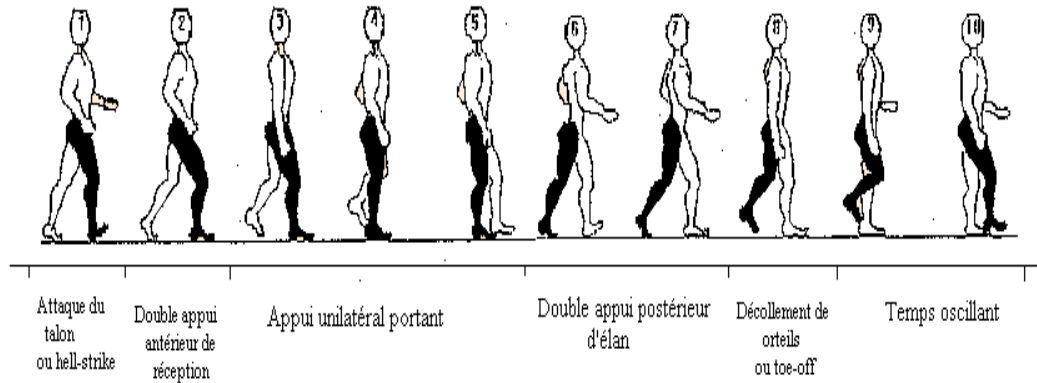


Figure 1.2: Les principaux événements du cycle de marche

Physiquement, on dit qu'un corps est en équilibre si la projection de son centre de gravité est à l'intérieur de la surface délimitée par les points d'appui, appelé polygone de sustentation (Le centre de gravité étant le point d'application de la résultante des actions de la pesanteur sur toutes les parties du corps). L'équilibre décrit de cette manière est appelé équilibre statique.

Ainsi, une *marche statiquement stable* peut être assimilée à une succession de postures stables, donc pas de déséquilibre pendant la marche. Cette allure de marche s'effectue à faible vitesse afin de réduire les effets de l'inertie. Elle surtout utilisée en cas de terrain irrégulier ou pendant la montée d'escaliers.

En général, l'Homme adopte la *marche dynamique* où il profite de l'inertie et de la force de gravité pour effectuer des mouvements balistiques. En effet, le mouvement de marche résulte d'une chute du tronc vers l'avant, il nécessite donc de quitter l'équilibre (statique) de la station debout. Pour empêcher sa chute, le corp est freiné continuellement par l'action allongement/rétrécissement des muscles des membres inférieurs.

1.1.4 Marche et centre de gravité

Le centre de gravité du corps d'un être humain se situe en position verticale, à 55% de la hauteur du sujet, mesurée à partir du sol, en avant de la seconde vertèbre sacrée (figure 1.3).

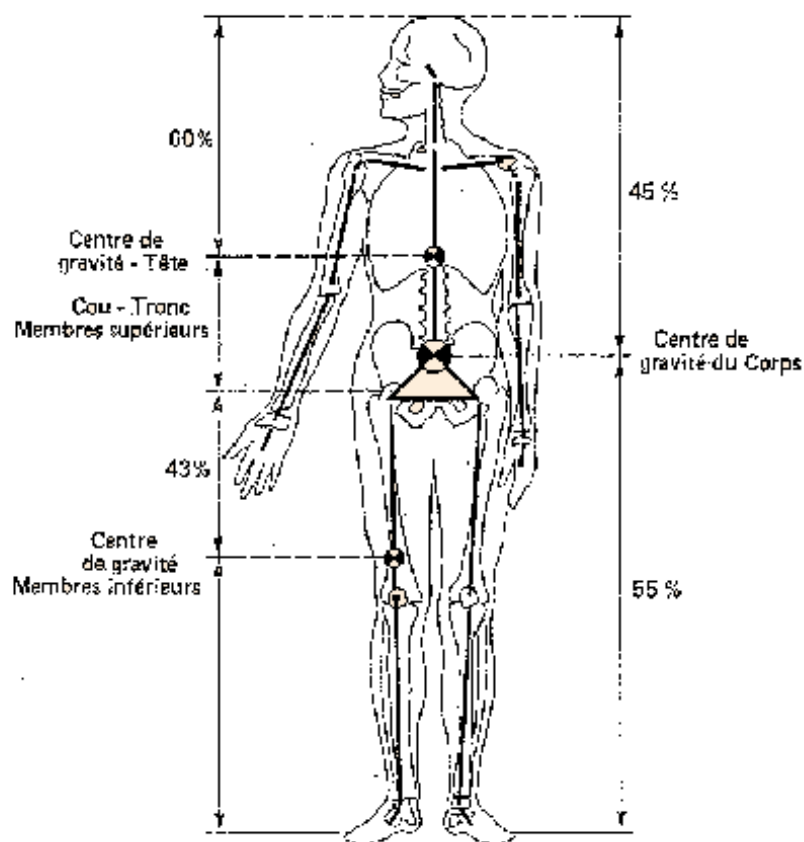


Figure 1.3: Placement des centres de gravité des segments du corps humain

1.1.4.1 Débattement du centre de gravité

Dans leur étude, PLAS, VIEL et BLANC ([PVB83]) assimilent le corps humain à une masse à déplacer ; ils utilisent le modèle théorique de la roue, où le noyau de la roue est en fait le centre de gravité humain et les rayons de la roue sont les membres inférieurs (Figure 1.4). Ils constatent que les membres inférieurs, rectilignes, impriment théoriquement au centre de gravité un déplacement sinusoïdale d'amplitude 75 millimètres (Figure 1.5). Cette amplitude est très grande et nécessite de ce fait une dépense énergétique importante.

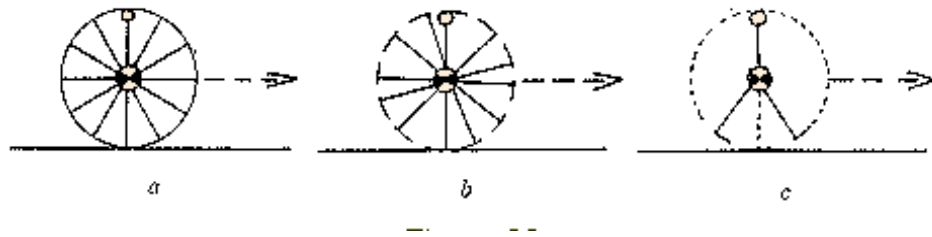


Figure 1.4: Modèle mécanique d'étude

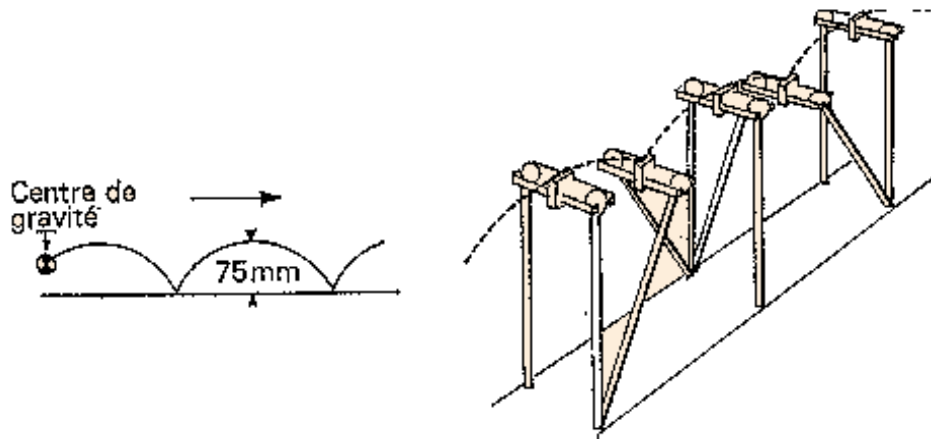


Figure 1.5: Déplacement vertical théorique du centre de gravité

1.1.4.2 Les effets des mécanismes de la marche sur le centre de gravité

En réalité, "l'ajustement de la longueur des membres et la disposition particulière des pièces squelettiques vont diminuer considérablement le débattement du centre de gravité de 75 mm à plus ou moins 45 mm" ([PVB83]).

En effet, le mouvement relatif à la marche humaine met en jeu divers déplacements, qui constituent des facteurs biomécaniques intervenant principalement dans le plan sagittal et dans le plan frontal illustrés dans la figure 1.6. Ils garantissent la stabilité de l'unité locomotrice et lui permettent le synchronisme mobilité/stabilité :

- la rotation du bassin autour de l'axe vertical
- la bascule du bassin du côté non porteur au passage du pas
- la flexion du genou pendant l'appui
- les mouvements du pied et de la cheville
- la coordination des mouvements du genou et de la cheville

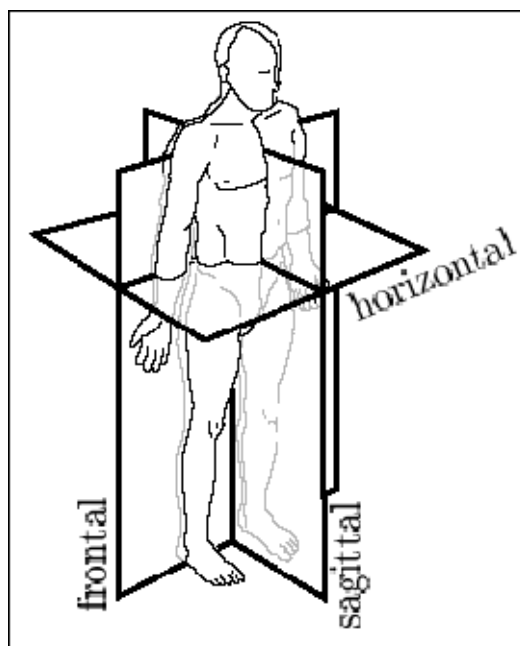


Figure 1.6: Plans concernés par la marche humaine

- le déplacement latéral du bassin.

Les trois premiers facteurs permettent une réduction de l'élévation du centre de gravité de 25 mm (30 mm pour certains marcheurs), contribuant à la diminution de la dépense d'énergie nécessaire à la marche du modèle théorique : Le premier élément a élevé les extrémités de l'arc, les deux autres ont abaissé le sommet de la courbe. Les mouvements du pied et de la cheville ainsi que la coordination des mouvements du genou et de la cheville permettent, quant à eux, un déplacement du centre de gravité selon une courbe sinusoïdale douce. Ainsi, le rendement de la marche est d'autant meilleur que la trajectoire du centre de gravité est proche d'une droite.

1.1.5 Economie de l'énergie pendant la marche

Une analyse des données collectées par électromyographique sur la marche humaine ([BL85]) a révélé que les muscles de la jambe en vol, pendant la phase de balancement sont relativement inactifs. Alors que l'activité musculaire en phase de double support est importante. Ce résultat est confirmé par Alexander ([McN84]) qui conclut que la marche naturelle tend à minimiser les efforts musculaires. D'où une minimisation de l'énergie consommée lors de la marche.

Par ailleurs, il faut noter que pour chaque allure (marche, course, saut), l'homme possède un fonctionnement nominal différent qui entraîne une consommation d'énergie différente. Deux vitesses sont remarquables La vitesse naturelle ou vitesse de confort et la vitesse rapide.

- La vitesse rapide est adoptée lorsqu'un sujet a pour but de minimiser son temps de parcours, et se situe autour de $2.40m/s$, dans ce cas le temps est privilégié plutôt que l'énergie. Au niveau énergétique, et au-delà d'une certaine vitesse, la course devient plus économe énergiquement que la marche.
- En l'absence de contraintes, Le sujet se déplace à la vitesse naturelle qui varie de 1.24 à $1.59m/s$ selon les personnes, et a pour caractéristique de minimiser les dépenses d'énergie du marcheur qui se mesure par le rapport :

$$\text{consommation d'oxygène} / \text{distance parcourue}$$

En effet, lorsque on est contraint à marcher à une vitesse supérieure à la vitesse naturelle, la fatigue survient plus rapidement car on consomme plus d'énergie, et même si cela peut paraître moins évident, la dépenses énergétiques, lors d'une marche à vitesse plus basse que la vitesse naturelle, est également plus importante que lors de la vitesse de confort, comme une visite au musée ou des courses à l'épicerie.

1.2 La marche robotique

La marche bipède robotique est inspirée de la marche humaine, bien qu'une marche si efficace et si élégante que la marche humaine soit loin d'être reproduite.

Durant la marche, le robot bipède alterne les rôles de ses deux jambes, ce qui lui permet de se déplacer sur la surface de marche. La manière d'interaction du robot marcheur avec le sol définit les différentes phases de marche : phase de double support et phase de simple support et l'impact du pied de balancement avec le sol.

Afin d'étudier la marche du robot bipède, les points suivants doivent être abordés :

- La mise en équation de la dynamique du robot, dans les différentes phases du cycle
- La prise en compte de la dynamique du sol lors du contact pied/sol.
- L'enchaînement des phases pour l'obtention du cycle de mouvement complet.
- Eventuellement, l'optimisation des trajectoires de marche par la minimisation des dépenses énergétiques.
- Prise en compte des limites admissibles définies par les diverses contraintes de saturation.
- La stabilité pendant la marche, qui n'est pas évidente à assurer (surtout à priori).

1.2.1 Modèle cinématique d'un robot bipède

Contrairement aux bras manipulateurs, le robot bipède n'est pas lié au sol d'une façon permanente, donc il doit avoir une structure mécanique lui permettant d'être libre de tout mouvement

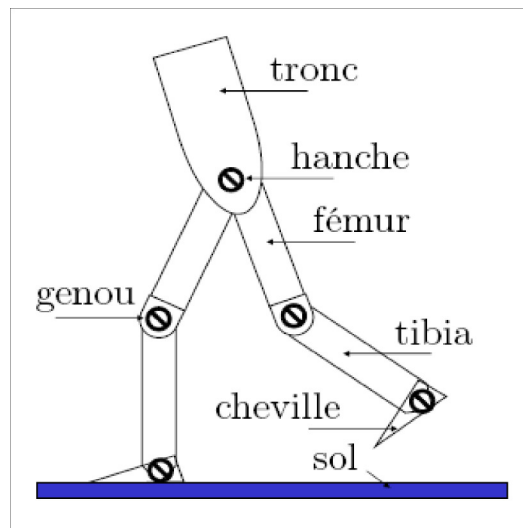


Figure 1.7: Exemple de structure de robot bipède

et de pouvoir décoller les pieds du sol à tout instant, ce qui nous amène à un modèle avec un nombre de degrés de liberté plus grand, donc plus complexe. Généralement on préfère étudier un robot avec la structure minimale qui permet de produire le mouvement de marche. La figure 1.7 présente un exemple de structure de robot bipède assez complète comprenant des articulations aux chevilles, aux genoux et à la hanche.

La modélisation cinématique du robot consiste en la définition d'un vecteur q appelée vecteur des coordonnées généralisées qui traduit l'état du robot, c'est à dire sa posture et sa position par rapport à l'environnement. La dimension du vecteur q détermine le nombre de degrés de liberté du robot. Elle permet d'exprimer les positions et les vitesses des centres de masse des différents segments du robot.

1.2.2 Modélisation dynamique d'un robot bipède

Afin de décrire la dynamique du robot bipède dans l'espace des coordonnées articulaires, deux formulations sont possibles : la formulation de Lagrange et la formulation de Newton Euler. Une comparaison rapide de ces deux démarches tirée de [KD88] montre que :

- La méthode de Newton-Euler : Elle traite séparément chaque articulation du robot en écrivant les équations de sa quantité de mouvement et de son moment cinétique. Ainsi, elle s'avère la plus adaptée pour la détermination du modèle dynamique inverse : donnant le couple à appliquer pour réaliser un mouvement donné. Le couplage entre les segments intervient dans l'écriture des forces et des couples appliqués par les segments voisins. En plus elle a l'avantage d'être performante vis à vis des calculs à effectuer pour dériver les

équations du modèle dynamique, ce qui permet de pouvoir l'utiliser directement en ligne.

- Le formalisme d'Euler-Lagrange : Il traite le robot dans son ensemble et se base sur des notions de travail et d'énergie pour calculer les éléments constituant le modèle dynamique direct. Il permet d'obtenir explicitement la matrice liée à l'inertie, celle liée à l'accélération centripète et centrifuge et le vecteur qui exprime l'accélération de la gravité. Ceci est un grand avantage lors d'une étude énergétique de la marche; Cette méthode est plus performante pour obtenir une forme fermée de l'évolution des coordonnées généralisées du système, ce qui la rend plus adaptée à la dérivation du modèle dynamique direct.

Dans la communauté robotique, la dynamique d'un robot bipède est souvent dérivée par le formalisme d'Euler Lagrange. Les équations du mouvement du système dans le plan sagittal est exprimée par les *équations d'Euler-Lagrange* données par

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = \Gamma \quad (1.1)$$

$q = (q_1 \dots q_n)^T$ le vecteur des coordonnées généralisées, q est généralement constitué des positions articulaires (posture du robot) et d'un couple de coordonnées cartésiennes (orientation du robot dans l'espace).

\dot{q} est le vecteur des vitesses généralisées.

$\Gamma = (\Gamma_1 \dots \Gamma_m)^T$ représente le vecteurs des entrées de commande appliqués au robot.

L étant la fonction du Lagrangien égale à :

$$L(q, \dot{q}) = E_c(q, \dot{q}) - E_p(q) \quad (1.2)$$

avec E_p est l'énergie potentielle et E_c est l'énergie cinétique du robot qui a pour expression :

$$E_c(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (1.3)$$

$M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ étant la matrice d'inertie du système symétrique et définie positive.

Le modèle (1.1) peut se réécrire sous la forme matricielle suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)u \quad (1.4)$$

avec $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est la matrice qui traduit les effets centrifuges et de Coriolis.

$G \in \mathbb{R}^n$ le vecteur traduisant les effets de la gravité.

$u = (u_1 \dots u_m)^T$ est le vecteur des couples articulaires.

$B(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice de répartition des actions des moteurs sur les articulations.

La matrice d'inertie est directement liée à l'expression de l'énergie cinétique par la relation suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

n étant la dimension de q

Pour des raisons pratiques, la matrice C doit respecter la relation

$$N(q, \dot{q}) = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$$

pour déterminer C , on utilise les symboles de Christoffel de la première espèce. Son expression est :

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial M_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial M_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial M_{jk}}{\partial q_i} \right)$$

Le vecteur des effets de gravité G est calculé symboliquement par le gradient de l'énergie potentielle par rapport au vecteur q :

$$G = \frac{\partial E_p(q)}{\partial t}$$

Ainsi, les équations de la dynamique décrivant le mouvement du robot bipède pendant les différentes phases de la marche peut être déduit du modèle initial (1.4) en associant les contraintes nécessaires de contact avec le sol.

1.2.3 Modélisation du phénomène de contact pieds-sol

Lorsque le robot est en contact avec le sol, ses pieds sont soumis à des forces dues à la réaction du sol. Le calcul du vecteur des forces de contact généralisées noté F_e nous permet de déterminer les efforts extérieurs exercés sur les articulations, qu'on note Γ_e . Ces efforts seront intégrés dans l'équation (1.4) traduisant ainsi la dynamique complète du robot bipède :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)u + \Gamma_e \quad (1.5)$$

Avec

$$\Gamma_e = J_e^T(q)F_e \quad (1.6)$$

Et $J_e(q) \in \mathbb{R}^{m \times 4}$ est la matrice jacobienne de la répartition des forces sur les différentes articulations. Elle est obtenue analytiquement par l'expression suivante :

$$J_e(q) = \partial X(q) / \partial q \quad (1.7)$$

X étant la position cartésienne du point de support du pieds du robot avec le sol.

$F_e \in \mathbb{R}^4$ est un vecteur composé des forces normales et des forces tangentielles de frottement de l'action du sol sur les deux pieds :

$$F_e = [F_{N1}, F_{T1}, F_{N2}, F_{T2}]^T$$

Lorsqu'un pied est au sol, les forces de contact (tangentielles et normales) sont actives, alors qu'elles sont nulles lorsque le pied est en l'air. Ce qui permet d'utiliser cette même formulation quel que soit le type de contact avec le sol (double ou simple).

L'expression des forces extérieures dépend du modèle du contact pieds/sol. On distingue deux principaux modèles :

- Le modèle rigide : Dans ce modèle, on suppose la rigidité idéale du pied de support et du sol. Avec cette hypothèse, Le phénomène d'impact du pieds de balancement avec la surface de marche serait instantané. Ce qui donne lieu à des forces de contact impulsionnelles. Par conséquent, si on considère que le cycle de marche est composé de deux phases : une phase de simple support et une phase de double support, le mouvement du robot sera régi par deux équations différentielles de la dynamique reliées par une équation algébrique traduisant le phénomène d'impact du pied avec le support de marche.
- Le modèle compliant : Le phénomène d'impact pieds-sol est considéré comme étant élastique, d'où l'avènement d'une déformation qu'on exprime généralement à travers des systèmes de ressorts et d'amortisseurs non linéaires. L'introduction de ressort amortisseur au point de contact entre le pied et le sol engendre une force continue dépendant de la position et de la vitesse du pieds. Cette force existe durant tout le temps ou le pied reste en contact. Ce modèle est plus réaliste que le premier puisqu'il permet de simuler les différents types de sol en changeant les coefficients de raideur et d'amortissement. Pour avoir plus de détails sur ce modèle, le lecteur est invité à voir la thèse de Laurence Roussel ([Rou98]).

Comme on peut voir dans [Rou98], l'introduction de la force de contact avec le modèle compliant rend la dynamique unique quelque soit l'état ou se trouve le robot donc continue et exprimé par des équations différentielles et non pas algébro-différentielles comme dans le cas du modèle rigide. Cependant le modèle rigide reste le plus adapté aux problèmes de simulation et de commande du robot car il est plus simple à mettre en oeuvre et n'augmente pas le degrés de liberté du système comme le fait le modèle compliant. Par conséquent, dans la suite du mémoire, le modèle rigide sera adopté, pour modéliser le contact pied/sol du robot bipède.

1.2.4 Les équations de la dynamique d'un cycle de marche

1.2.4.1 La dynamique du double support

Le contact est supposé inélastique est sans glissement, ce qui se traduit par le fait que le pied reste au sol après le contact sans rebonds ni glissement. D'où l'ajout d'une d'une contrainte cinématique définie par :

$$\Psi(q) = 0 \in \mathbb{R}^4 \iff \begin{cases} x_{pi} = L_{pas} \\ y_{pi} = 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2 \quad (1.8)$$

$x_{pi}, y_{pi}, \dot{x}_{pi}, \dot{y}_{pi}$ sont les positions et les vitesses du pieds $i = 1, 2$. Cette contrainte est appelée condition de fermeture. Elle réduit l'ensemble admissible des coordonnées articulaires et elle est introduite dans la dynamique à l'aide des multiplicateurs de Lagrange λ_p qui présentent les forces de contact. :

$$\begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = Bu_{ds} + J_e^T(q)\lambda_p \\ \text{sous } \Psi(q) = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

$u_{ds} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des couples appliquées durant le double support.

1.2.4.2 La dynamique du simple support :

Pendant la phase de simple support, si on suppose que le bout du pied de la patte de support est un pivot fixé au sol, cela implique le non glissement et du non décollage. Par conséquent, sa vitesse est nulle, ce qui se traduit par le système d'équation suivante :

$$J_e(q)\dot{q} = 0 \quad (1.10)$$

Les équations 1.10 sont linéairement dépendantes du modèle 1.5. Ce qui implique une réduction des degrés de liberté du système et conduit à l'équation de la dynamique réduite donnée par :

$$M(q_r)\ddot{q}_r + C(q_r, \dot{q}_r)\dot{q}_r + G(q_r) = Bu_{ss} \quad (1.11)$$

q_r est le vecteur de la configuration réduite du robot de dimension $r = n - 2$.

$u_{ss} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des couples appliquées durant le simple support.

1.2.4.3 Equation de l'impact

La pose du pieds de vol sur le sol est une collision entre deux corps rigide. Elle est supposé avoir lieu en un temps infiniment petit. La configuration du robot reste inchangée $q = cte$, alors qu'un

changement instantané de vitesse apparaît. Les forces impulsionnelles de contact engendrées, pendant cet instant, étant grandes par rapport aux couples centrifuges et de Coriolis, ces derniers sont négligés. Si on suppose en plus que les couples de commande ne sont pas impulsionnelles, la dynamique de l'impact peut être obtenue d'une façon simple par intégration de 1.5. Ce qui conduit à une relation reliant le vecteurs des vitesses généralisées juste après et juste avant l'impact noté respectivement \dot{q}^+ et \dot{q}^- :

$$M(q)(\dot{q}^+ - \dot{q}^-) = \dot{q}^+ + I_e + I_c \quad (1.12)$$

I_e étant le vecteur impulsion des forces généralisées dues à l'impact et I_c le vecteur impulsion des couples appliqués par les actionneurs.

En appliquant les relations 1.10 et 1.6 pendant la durée infinitésimale d'impact on obtient :

$$J_e(q)\dot{q}^+ = 0 \quad (1.13)$$

et

$$I_e = J_e^T(q)\delta F_e \quad (1.14)$$

Ainsi, δF_e et \dot{q}^+ peuvent être calculées par résolution du système des équations (1.13) , (1.12) et (1.14).

Alors, la dynamique de l'impact est exprimée par l'expression suivante :

$$\begin{bmatrix} M(q) & -J_e^T(q) \\ J_e(q) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}^+ \\ \delta F_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M(q)\dot{q}^- + I_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

1.2.5 Contraintes de la marche

En pratique, les signaux de commande du robot sont limités par les valeurs maximales de couples que peut fournir les actionneurs. En plus, toutes les postures du robot ne sont pas toujours possibles. L'ensemble des postures admissibles est défini en tenant compte des débattement articulaires. Ces derniers représentent les limites extrêmes sur les excursions au niveau des différentes articulations dans les sens du mouvement. Ces limites sont assurées par des butées mécaniques.

1.2.6 Minimisation des dépenses énergétiques

Compte-tenu des résultats biologiques citées dans le paragraphe 1.1.5, la minimisation des dépenses énergétiques est un objectif inhérent à l'activité de la marche humaine.

Dans cette même optique, et pour augmenter l'autonomie du robot bipède, les trajectoires qui minimisent l'énergie mécanique nécessaire au mouvement de marche sont les plus souhaitées. Ces trajectoires peuvent être obtenues par optimisation d'un critère directement lié aux dépenses énergétiques du robots ([CY01], [GAP01]), [Cab97], [MS84] et [RG98]), ou par exploitation de la notion de la marche passive robotique sans intervention d'un système de commande (voir Chapitre 2).

1.2.7 Marche statique et marche dynamique

Comme dans le cas de la marche humaine, deux types de marche peuvent être envisagées pour le robot bipède : la marche dynamique et la marche statique.

- La marche statique est une succession de postures statiques. On l'obtient en obligeant la projection verticale du centre de masse du robot à se positionner à l'intérieur du polygone de sustentation, et qui peut se définir comme l'enveloppe convexe joignant les points d'appuis au sol (Figure ??). Cependant, ce type de marche est très restrictif et caractérisé par des mouvements lents. Par conséquent, cela empêchera le robot marcheur d'atteindre de grandes vitesses de déplacement.

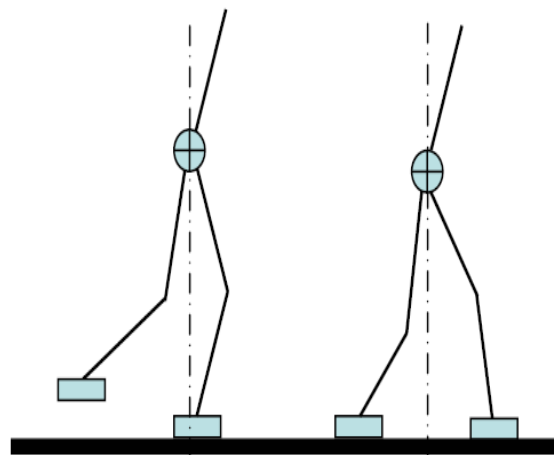


Figure 1.8: Marche statique d'un robot bipède (dans le plan saggital)

- En revanche, la marche dynamique, la plus proche de la démarche générale de l'Homme, le permet. Elle est obtenue en supprimant la contrainte sur le déplacement du centre de masse, ce qui augmente la mobilité du système par une plus grande flexibilité des mouvements des jambes et des pieds. Du point de vue de la commande, la marche dynamique est la plus difficile à obtenir, étant donné que le robot marcheur est très instable.

1.3 Conclusion

Après avoir vu les aspects fondamentaux de la marche humaine afin de mieux comprendre son fonctionnement, nous avons souligné les caractéristiques de la marche robotique. La modélisation dynamique et celle du contact pieds-sol du robot ont ensuite été abordées suivies de l'analyse de quelques points essentiels à considérer lors de l'étude de la marche d'un robot bipède.

La formulation d'Euler Lagrange et le modèle de contact rigide ont été détaillés car jugés plus adaptés à notre étude du fait de leur simplicité. Ce qui nous a permis d'obtenir les équations du mouvement qui modélise le comportement dynamique du robot bipède pendant un cycle de marche. Ces équations sont de type algèbro-différentielles. Ce qui implique une dynamique discontinue. Par conséquent, le robot bipède appartient à la classe des systèmes hybrides.

Dans le chapitre suivant, il sera question des principes de la marche robotique passive, qui est une propriété des robots bipèdes sans genoux et en particulier du robot type-compass. Elle présente une grande similitude avec le comportement humain, du fait de la faible activité des muscles des pieds de l'Homme pendant la phase de simple support (§ 1.1.5), la jambe de balancement se comportant comme un pendule inversé ([Rai86]).

Chapitre 2

La marche robotique passive

Contrairement aux méthodes classiques de commande des trajectoires des systèmes mécaniques non linéaires, qui ont pour objectif de commander les actionneurs afin de forcer le système à évoluer à l'encontre des tendances de sa dynamique intrinsèque, l'approche de la dynamique passive consiste en l'exploitation de la dynamique naturelle du système. En effet, La marche s'avère un phénomène naturel pour les mécanismes à pattes sans genoux de la même façon que le balancement est un mouvement naturel pour les pendules. Un robot marcheur qui utilise sa dynamique passive peut être intéressant car il ne nécessite pas de l'énergie pour la stabilisation ou la commande mais juste de la puissance pour compenser de petites pertes de l'énergie. En général, la principale cause de ces pertes énergétiques est le phénomène d'impact des pattes avec le sol.

En se basant sur ce même concept, McGeer ([McG90b]) a pu démontré que le robot compas (2.1) peut, sous certaines conditions, effectuer une marche stable sous le seul effet de la gravité. En effet, si on place le robot sur un plan incliné de pente descendante, il existe une configuration initiale à partir de laquelle le compas se déplace de façon périodique en utilisant sa dynamique intrinsèque. La perte en énergie cinétique due à la collision des pieds avec le sol sera compensée par le changement de l'énergie potentielle provoqué par le déplacement sur la pente.

Notre objectif , dans ce chapitre est de poser les bases théoriques pour la détermination des allures de marche bipodale et d'en étudier la stabilité, tout en se basant sur le principe de la marche passive introduite par McGeer. Nous choisissons le modèle le plus simple capable de reproduire une marche stable qu'est le robot type-compas. Nous allons commencer par une description détaillée du modèle et de sa dynamique. Ensuite nous allons présenter la procédure numérique pour rechercher des cycles limites passifs sur des petites pentes et déterminer leur stabilité.

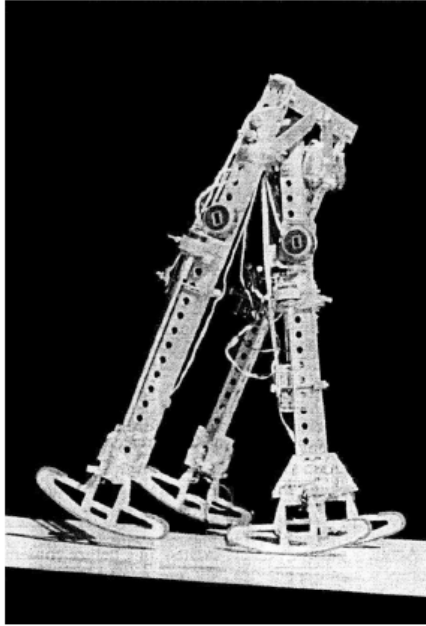


Figure 2.1: Le robot bipède passif type-compass expérimenté par McGeer

2.1 Le robot type compas

2.1.1 Description

2.1.1.1 Configuration du robot

Le robot type-compass ([AGE96]) est un système double pendule inversé plan constitué de trois corps : deux jambes et une hanche. Les masses des corps sont supposées ponctuelles. Les jambes sont identiques et possèdent chacune une articulation prismatique au niveau de la hanche. Le robot est communément appelé compas. (Figure 2.2).

Pendant le marche, La configuration du robot est décrite par :

θ_s : l'angle que fait la patte de support avec la verticale.

θ_{ns} : l'angle que fait la patte de non support avec la verticale.

q : le vecteur de configuration du compas. Il est égale à :

$$q = [\theta_{ns}, \theta_s]^T$$

2.1.1.2 Hypothèses simplificatrices

Pour bien décrire la marche du robot compas, on pose les hypothèses suivante :

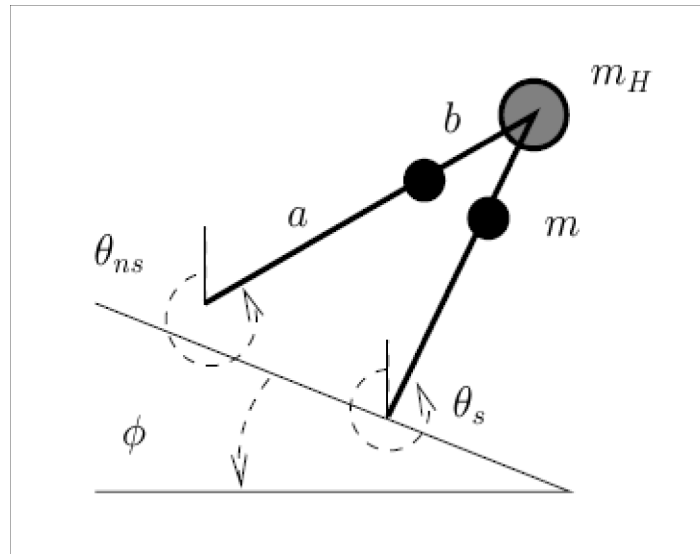


Figure 2.2: Le robot bipède type-compas

- Le robot type-compas est complètement actionné par deux couples indépendants appliqués respectivement au niveau de la cheville et de la hanche
- Il se déplace sur une surface plane horizontale ou inclinée. L'angle de la pente noté ϕ est supposé constant.
- Le mouvement est décrit dans le plan sagittal.
- Le mouvement de marche est une succession de phases de balancement appelée également phases de simple support, et des phases de transition.
- Pendant la phase de transition ou d'impact, le support (appui) est transféré d'un pied à un autre en une durée infinitésimale
- L'impact du pied de balancement avec le sol est instantané : absence de phases de double support.
- Le contact entre le pied de support et le sol est rigide, et le frottement est suffisant pour éviter le glissement.

2.1.1.3 Problème de l'enfoncement des pieds

Le robot compas étant raide (sans genoux), la notion du point de contact entre la patte et la surface de marche peut présenter une ambiguïté physique. En effet si la patte en vol ne quitte pas le plan sagittal, elle va être obligée au moment du contact de pénétrer dans la surface du sol. McGeer ([McG90b],[McG90c]) a résolu ce problème de deux manières. la première, par l'ajout de petits moteurs au bout de la patte. Les moteurs permettent de pousser les pattes hors du plan sagittal au moment de l'impact et de les faire revenir juste après le contact. La

deuxième technique est de mettre de petites extensions aux bouts des pattes. Ces extensions se plient quand la patte touche le sol. Kéramane ([Ker97]) a supposé que les deux jambes du robot compas possèdent chacune une articulation prismatique au niveau du genou. Cette articulation a un effet nul sur la dynamique du robot car située en dessous du point concentrant la masse de la jambe. Elle servira seulement à éviter pendant la phase de vol que la jambe de balancement ne heurte pas le sol. Une autre solution a été mise en oeuvre, par des chercheurs de l'université de Delft ([Wis04]). Ils ont doté la surface de marche du robot compas de plusieurs trous. Ces trous sont placés de telle façon afin de coïncider avec les endroits éventuels de l'enfoncement des pieds de robot.

Dans nos simulations, On choisit cette dernière solution : la jambe de balancement du robot est libre de tout mouvement comme s'il y avait des trous placés dans la surface de marche pour éviter la pénétration du pied dans le sol.

2.1.2 Modélisation de la marche

2.1.2.1 La phase de simple support

L'équation dynamique est obtenue à partir de la formulation de Lagrange et sera égale à :

$$M(q)\ddot{q} + C(q; \dot{q})\dot{q} + G(q) = Bu \quad (2.1)$$

avec u représente le vecteur des couples moteurs au niveau de la hanche et de la cheville :

$$u = \begin{bmatrix} u_H \\ u_s \end{bmatrix}$$

B est une matrice constante traduisant l'effet des couples moteurs sur les articulations, elle est égale à :

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les matrices $M(q)$, $C(q, \dot{q})$, et le vecteur $G(q)$ sont donnés par :

$$M(q) = \begin{bmatrix} mb^2 & -mlb \cos(\theta_s - \theta_{ns}) \\ -mlb \cos(\theta_s - \theta_{ns}) & (m_H + m)l^2 + ma^2 \end{bmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{bmatrix} 0 & mlb \sin(\theta_s - \theta_{ns})\dot{\theta}_s \\ mlb \sin(\theta_{ns} - \theta_s)\dot{\theta}_{ns} & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(q) = \begin{bmatrix} mbg \sin(\theta_{ns}) \\ -(m_H l + ma + ml)g \sin(\theta_s) \end{bmatrix}$$

avec $l = a + b$.

2.1.2.2 la phase d'impact

Il est évident que les jambes de support et de non support changent de rôles après l'impact (mouvement cyclique). En plus, compte-tenu des hypothèses concernant l'impact du paragraphe 2.1.1.2, l'impact résulte d'un changement instantané des vitesses articulaires. On applique les lois de conservation des moments angulaires pour calculer les vitesses juste avant et juste après l'impact.

Ainsi, la dynamique du robot compas pendant la durée infinitésimal de l'impact est décrite par les équations suivantes :

$$\begin{cases} q^+ = Jq^- \\ Q^+(\alpha)q^+ = Q^-(\alpha)q^- \end{cases} \quad (2.2)$$

Les indices " - " et " + " font référence respectivement aux valeurs juste avant et juste après l'impact.

J est une matrice constante qui traduit la continuité de la configuration du robot et la cyclicité du mouvement. Elle est définie par :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$Q^-(\alpha)$ et $Q^+(\alpha)$ sont des matrices dont les lignes correspondent aux moments angulaires du robot bipède. Elles sont définies par :

$$Q^-(\alpha) = \begin{bmatrix} -mab & -mab + (m_H l^2 + 2mal) \cos(2\alpha) \\ 0 & -mab \end{bmatrix}$$

$$Q^+(\alpha^-) = \begin{bmatrix} mb^2 - mbl \cos(2\alpha^-) & (ml^2 + ma^2 + m_H l^2) - mbl \cos(2\alpha^-) \\ mb^2 & -mbl \cos(2\alpha^-) \end{bmatrix}$$

avec α^- l'angle du demi entre-jambe juste avant l'impact, égale à :

$$\alpha^- = \frac{\theta_{ns}^- - \theta_s^-}{2}$$

le détail de la procédure de la modélisation du robot compas se trouve dans [AGE96] ou [Ker97].

2.1.3 Représentation d'état, système hybride avec effets impulsives ([GAP01])

Le mouvement de marche du robot type compas est gouverné par les équations (2.1) et (2.2) qui sont respectivement des équations continues et discrètes.

Alors le système hybride peut être représenté sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, u), x = x_0 & \text{si } s(x) \neq 0 \\ x^+ = h(x^-), & \text{si } s(x) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

avec

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

La première équation décrit le système hors des événements d'impact et la seconde est une équation algébrique qui réinitialise la variable d'état à chaque événement d'impact. Les fonctions F et h sont déterminées à partir de (2.1) et (2.2), leurs expressions respectives sont données par :

$$F(x) = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q} \\ M(q)^{-1}(B(q)u - C(q; \dot{q})\dot{q} - G(q)) \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

et

$$h(x) = \begin{bmatrix} Jq^- \\ (Q^+)^{-1}Q^-q^- \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

La fonction s caractérise physiquement la surface du sol. Elle est définie par l'équation suivante :

$$s(x) = \theta_{ns} + \theta_s - 2\phi = 0 \quad (2.6)$$

L'équation (2.6) est satisfaite quand les deux pieds touchent le sol.

2.2 Description d'une marche passive stable

Pour bien comprendre la marche du robot bipède nous allons présenter quelques définitions : ([GTE98])

- **Locomotion passive** : Quand le robot marcheur n'utilise aucune forme d'actionnement pour son déplacement et la perte de l'énergie cinétique due à l'impact est compensée par le changement de l'énergie potentielle provoqué par la force de la gravité, la locomotion est dite passive. Du point de vue dynamique, une machine non forcée est un système autonome.
- **Allure régulière** (*steady gait*): Ce terme est couramment utilisé pour signifier que le robot peut indéfiniment marcher sans tomber.
- **Pas de marche** : décrit la période séparant le décolllement d'un pied et son impact suivant avec le sol. La période du pas et la fréquence de l'allure sont respectivement la durée d'un pas et le nombre de pas marchés par seconde.

- **Allure périodique** : une allure est dite périodique si tous les paramètres spacio-temporels évoluent exactement de la même façon après chaque p pas. L'entier p est appelé *la période de l'allure*.
- **Allure symétrique** : Une allure est dite symétrique si elle est périodique avec $p = 1$. Dans ce cas deux pas consécutifs sont indiscernables. Quand une allure ne possède pas cette propriété, elle est dite *asymétrique*.
- **Cycle de marche** : Dans le cas d'une allure p -périodique, le cycle de marche définit p pas successifs.
- **Allure chaotique** : Une allure chaotique est caractérisé par une apériodicité totale.

Soit le système robot type-compass passif dont la dynamique est décrite par l'équation (2.3) avec $u = 0$. Une allure symétrique régulière du robot peut être décrite dans l'espace de phases par un cycle limite stable qui traduit le comportement périodique de la trajectoire. Sur un pas de marche, le cycle limite consiste en une courbe fermée comportant une portion de droite. Cette dernière correspond à l'instant où l'une des deux jambes touche le sol.

Dans ce qui suit, on présente un petit rappel sur les cycles limites des systèmes non linéaires.

2.3 Cycle limite d'un système non linéaire

2.3.1 Définitions

Soit un système dynamique autonome représenté par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

la solution de cette équation, appelé flux, et noté $\phi(x_0, t)$: c'est la trajectoire dont le vecteur de conditions initiales est $x(0) = x_0$. Si pour des conditions initiales x^* et un instant T on a :

$$\phi(x^*, T) = x^*$$

On dit que le flux $\phi(x^*, T)$ est une *solution périodique* du système (2.7). Sa représentation dans l'espace des phases est une courbe fermée. Si cette courbe est isolée (c'est à dire son voisinage n'en contient aucune autre) on l'appelle *cycle limite*. Si toutes les trajectoires qui commencent dans un voisinage du cycle limite y convergent, on dit que le cycle limite est *stable*. Il est *instable (non stable)* si toutes (quelques) trajectoires avoisinantes divergent. On appelle *bassin d'attraction* ou domaine de stabilité, le voisinage autour du cycle limite stable qui contient toutes les conditions initiales qui convergent vers le cycle limite (figure 2.3). Enfin, un *cycle limite* est dit *passif* s'il n'est commandé par aucune force extérieure.

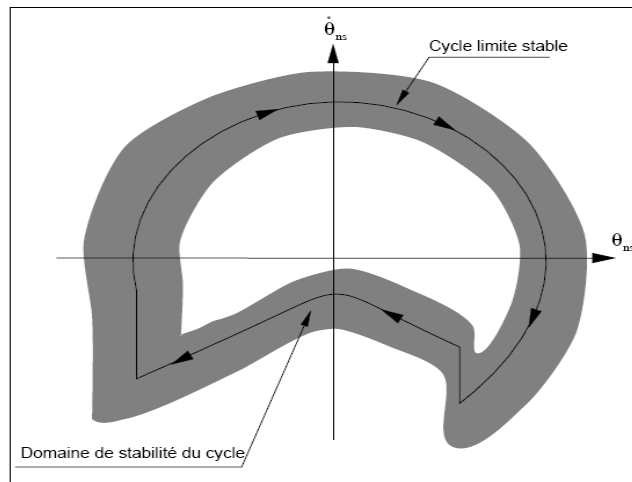


Figure 2.3: Le bassin d'attraction d'un cycle limite stable

2.3.2 Stabilité orbitale

La stabilité d'une solution périodique peut être formulée en terme de stabilité des orbites dans le plan de phase. En effet, considérons le système non linéaire (2.7). Soit $\phi(x_0, t)$ une solution périodique de ce système et C l'orbite dans l'espace de phase associé à cette solution, on parle de la stabilité orbitale de $\phi(x_0, t)$ lorsque C est stable, et de stabilité orbitale asymptotique de $\phi(x_0, t)$ lorsque C est asymptotiquement stable ([Kha96]). Nous utiliserons cependant le terme de stabilité orbitale dans les deux cas.

Definition : La trajectoire de phase C est dite orbitalement stable si, étant donné un réel $\epsilon > 0$ tel que si R' est un point représentatif sur une autre trajectoire C' , qui se trouve à une distance δ de C à l'instant t_0 , alors R' reste à une distance ϵ de C pour $t \geq 0$. S'il n'existe pas de δ alors la trajectoire C est dite orbitalement instable.

En se basant sur ces notions, nous allons analyser les orbites périodiques du robot bipède qui fait l'objet de notre étude et qui constitue un système plus complexe du fait de son caractère hybride alternant une dynamique continue et des événements discrets dans le temps. Dans la section suivante, nous allons voir comment déterminer des cycles limites hybrides et analyser leur stabilité en utilisant une procédure numérique.

2.4 Détermination du cycle limite hybride

Plusieurs approches peuvent être appliquées pour déterminer les cycles limites dans l'espace de configuration d'un système dynamiques. Dans ([PC89]), les auteurs ont exposé quelques unes d'entre elles. Keramane ([Ker97]) utilise les cycles limites du linéarisé tangent pour trouver en

simulation les cycles passifs du robot compas. Ceci n'est valable que pour des pentes faibles et des conditions restrictives sur les paramètres géométriques du robot. Dans ce paragraphe, nous allons présenter une approche numérique pour la simulation des cycles limites passifs d'un robot bipède. Elle exploite l'application de Poincaré et se base sur une méthode d'optimisation itérative qui est l'algorithme de Newton Raphson.

2.4.1 L'application de Poincaré

Pour des systèmes non linéaires hybrides tels que les robots marcheurs dont la représentation d'état est donnée par l'expression suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x), x(0) = x_0 & s(x) \neq 0 \\ x^+ = h(x^-), & s(x) = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

L'utilisation de l'application de Poincaré s'avère efficace pour la localisation des cycles limites ([His01]). Elle consiste à choisir un hyperplan Γ appelé *section de Poincaré* qui sera coupée périodiquement par le flux de l'équation d'état (2.8) qui gouverne le mouvement du robot (figure 2.4).

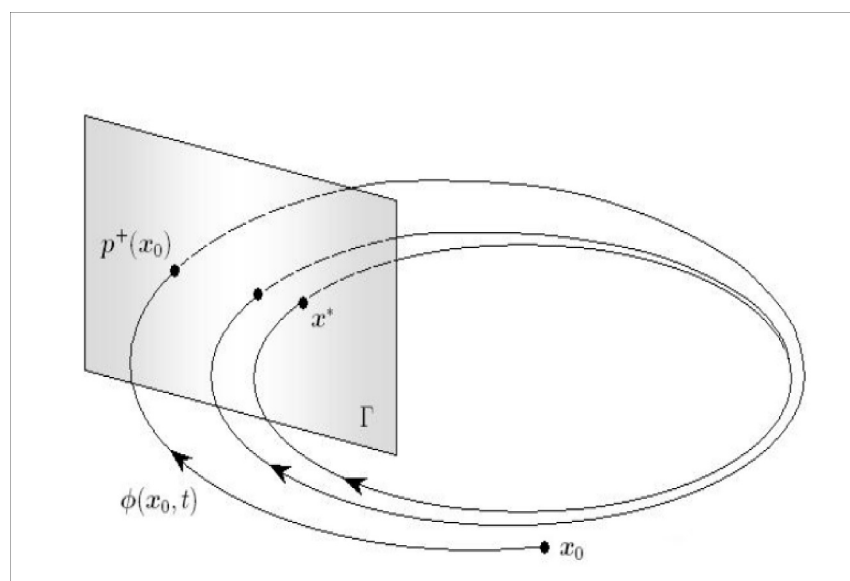


Figure 2.4: L'application de Poincaré dans le plan de phase

Pour des raisons pratiques, on identifie Γ à la surface d'impact. Donc c'est l'ensemble des points vérifiant la condition de transition entre la dynamique continue et l'événement discret :

$$\Gamma = \{x \mid s(x) = 0\}$$

s étant définie par l'expression (2.6).

On peut aussi caractériser Γ par le vecteur v_Γ normal à cette surface et par un point x_Γ appartenant à la même surface, tel que

$$v_\Gamma = \nabla_x s(x) \quad \text{et} \quad s(x_\Gamma) = 0$$

Sachant que toutes les trajectoires qui passent par Γ à un instant t donné vérifieront l'équation $s(\phi(x_0, t)) = 0$. Si nous sommes intéressés seulement par les trajectoires $\phi(x_0, t)$ qui coupent la surface de Poincaré Γ dans la direction positive par exemple, alors, on pourra ajouter une autre condition sur les trajectoires désirées et qui sera exprimée de la façon suivante :

$$v_\Gamma \cdot f(\phi(x_0, t)) = 0$$

On considère la trajectoire $\phi(x_0, t)$ solution de (2.8) et on suppose que $x_0 \in \Gamma$. On définit $x_1 = P(x_0)$ le deuxième point de la trajectoire qui appartient à la section de Poincaré Γ . Ainsi, l'application P appelée *Application de Poincaré* sera définie par :

$$x_{k+1} = P(x_k) \tag{2.9}$$

Un cycle limite est mis en évidence si la trajectoire coupe la surface du Poincaré périodiquement au même point. Par conséquent, la localisation des cycles limites revient à rechercher un point fixe de l'application du Poincaré P noté x^* et qui vérifie l'équation suivante :

$$x^* = P(x^*) \tag{2.10}$$

2.4.2 Recherche du point fixe : l'algorithme de Newton Raphson

La recherche des points fixes se ramène à un problème mathématique qui est la résolution de l'équation de type :

$$H(x) = P(x) - x = 0. \tag{2.11}$$

A cette fin, et avec un vecteur de conditions initiales assez proche du point fixe, on peut utiliser l'algorithme numérique de Newton Raphson ([PC89]). C'est l'une des méthodes les plus utilisées pour la détermination des zéros de fonctions, et qui peut être généralisée sans difficultés au cas de fonctions multidimensionnelles ([Khr04]). En plus, la technique a une convergence quadratique à l'approche des zéros, et ne nécessite qu'une seule condition initiale. Elle consiste en une résolution par itérations successives à partir d'une solution approchée. La formule itérative de cet algorithme est donnée par :

$$x^{(k+1)} = - \left(DH(x^{(k)}) \right)^{-1} H(x^{(k)}) \quad (2.12)$$

avec $DH(x^{(k)})$ est la matrice jacobienne de la fonction H évaluée au vecteur initiale à la $k^{\text{ème}}$ itération. Elle est obtenue par dérivation de (2.11) :

$$DH(x^{(k)}) = DP(x^{(k)}) - I$$

Il est généralement impossible d'obtenir une expression analytique de la matrice DP . A cet effet diverses méthodes ont été proposées pour résoudre ce problème. Dans [GEK97] Goswami et al. on utilisé une procédure numérique simple qui consiste à perturber à chaque fois une composante du vecteur d'état puis observer le premier retour de l'application; cette opération est répétée au moins un nombre égale à la dimension du vecteur d'état (une fois pour chaque composante). Coleman ([Col98]) et Garcia ([Gar98]) ont utilisé un algorithme dit de Henon qui permet d'intégrer les équations de mouvement en détectant les impacts.

Dans ce mémoire, nous utilisons la méthode de la sensibilité des trajectoires qui a pour avantage de déterminer la jacobienne DP autour d'une trajectoire nominale et pas seulement autour du point fixe. Le principe de la théorie sera détaillé dans le paragraphe 2.5.2, puisque cette notion sera en plus exploitée lors de l'étude de la stabilité du cycle limite de marche.

2.5 Analyse de la stabilité du cycle limite hybride:

2.5.1 Stabilité locale

Le problème de la stabilité d'une trajectoire périodique peut être abordée en utilisant l'application de Poincaré définie par l'expression (2.9). En effet, d'après le paragraphe 2.4.1, une trajectoire périodique C dans le plan de phase peut être caractérisée par le point fixe de l'application de Poincaré. Ainsi, l'analyse de la stabilité de l'orbite périodique est réduite à l'étude de la stabilité du système discret 2.10 autour du point fixe x^* .

Afin d'étudier la stabilité locale de ce cycle limite, on perturbe localement l'état autour du point solution (point fixe de l'application de Poincaré P) puis on construit l'application du premier retour de Poincaré $P(x)$. En perturbant légèrement l'état autour du cycle limite d'une quantité Δx^* , l'application non linéaire de Poincaré, autour du point d'équilibre, peut s'écrire à l'aide d'un développement en série de Taylor, comme suit :

$$P(x^* + \Delta x^*) = P(x^*) + (D_x P) \Delta x^* \quad (2.13)$$

Où $DP = \frac{\partial P}{\partial x}$ est la fonction Jacobienne de P . Dès lors que x^* est une solution périodique l'équation (2.13) peut s'écrire

$$P(x^* + \Delta x^*) = x^* + (D_x P)\Delta x^*$$

L'application P est stable si les valeurs propres de la jacobienne DP autour du point fixe x^* sont strictement à l'intérieur du cercle unité (leurs modules sont inférieurs à 1).

Une méthode pratique pour la détermination des valeur propres de DP repose sur la théorie de la sensibilité de la trajectoire qui sera exposée dans le paragraphe suivant.

2.5.2 Sensibilité de la trajectoire

La méthode de la sensibilité des trajectoires a été utilisée dans l'étude de stabilité des systèmes hybrides présentant des contraintes algébriques ([His01], [LP98]). Cette approche présente l'avantage d'étudier le linéarisé autour d'une trajectoire nominale et pas seulement autour du point fixe. En effet, on établit un lien entre la Jacobiënne de l'application de Poincaré et une fonction facilement calculable qui est la fonction de la sensibilité de la trajectoire, appelée aussi *matrice monodrome*. Par conséquent, la stabilité du cycle limite peut être étudiée par l'examen des valeurs propres de la fonction monodrome qu'on note $\Phi(x^*, T)$.

En effet, il a été démontré dans [PC89] que :

$$DP(x^*) = \left[I - \frac{f(y)v_\Gamma^T}{v_\Gamma^T \cdot f(y)} \right] \Phi(x^*, T) \quad (2.14)$$

avec $y = P(x^*)$, T est le temps que met la trajectoire pour aller de x^* à y .

La fonction monodrome sera calculée en utilisant une équation variationnelle (2.5.2.2)

L'une des valeurs propres de la matrice monodrome est toujours égale à 1, comme cela est montré dans [PC89]. Le vecteur propre correspondant est $f(x^*)$. Les autres valeurs propres de cette matrice sont appelées les multiplicateurs caractéristiques m_i . et ils correspondent aussi aux valeurs propres de de $DP(x^*)$.

2.5.2.1 Critère de la stabilité

Par conséquent, par rapport à la stabilité du cycle limite, on distingue trois cas

- Toutes les m_i sont à l'intérieur du cercle unité ($|m_i| < 1 \ \forall i$), le cycle limite est stable : toutes les trajectoires légèrement perturbées retourne au cycle limite
- Toutes les m_i sont à l'extérieur du cercle unité ($|m_i| > 1 \ \forall i$), le cycle limite est instable : sous une petite perturbation toutes les trajectoires divergeront du cycle limite
- Certaines m_i sont à l'intérieur et les autres sont à l'extérieur du cercle unité. Dans ce cas le cycle limite est non stable : Des trajectoires légèrement perturbées convergent vers le cycle limite, d'autres divergent.

Dans le paragraphe suivant, nous allons présenter l'algorithme qui nous permet de calculer la matrice monodrome ([His01]).

2.5.2.2 Calcul de la matrice monodrome

On considère un système dynamique hybride à événements discrets décrit par l'équation (2.8)

On rappelle que le flux est donné par l'expression suivante :

$$\phi(x_0, t) = x(t) \quad (2.15)$$

La sensibilité de ce flux par rapport à la variation du vecteur des conditions initiales x_0 est obtenue par la linéarisation de l'équation (2.15) autour de x_0

$$\Delta x = \frac{\partial \phi(x_0, t)}{\partial x_0} \Delta x_0 \quad (2.16)$$

On note $\Phi_x(x_0, t)$ la fonction de la sensibilité de la trajectoire. Elle est définie par :

$$\Phi(x_0, t) = \frac{\partial \phi(x_0, t)}{\partial x_0}$$

Sachant qu'en l'absence d'évènement discrets, $\phi(x_0, t)$ est solution de l'équation

$$\begin{cases} \dot{\phi}(x_0, t) = f(x) \\ \phi(x_0, 0) = x_0 \end{cases} \quad (2.17)$$

Par une différentiation par rapport à x_0 , on conclue que la fonction de sensibilité est solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} \dot{\Phi}(x_0, t) = Df(x(t))\Phi(x_0, t) \\ \Phi(x_0, 0) = I \end{cases} \quad (2.18)$$

Avec $Df = \frac{\partial f}{\partial x}$ est la matrice Jacobiënne de la fonction f par rapport au vecteur des variable d'état x .

L'équation différentielle (2.18) s'appelle l'équation variationnelle. On résoud simultanément les équations (2.17) et (2.18) pour obtenir la flux $\phi(x_0, t)$ et la matrice se sensibilité $\Phi(x_0, t)$.

(2.18) décrit l'évolution de $\Phi(x_0, t)$ qu'en l'absence des événement discrets, par la suite on doit voir comment la sensibilité change pendant les événements d'impact.

L'évènement se produit quand la foncton de tansition $s(x) = 0$. A cet instant les variables d'état du modèle subissent un changement algébrique instantané traduit par la fonction h et la dynamique s'écrit alors :

$$x^+ = h(x^-)$$

Ceci implique que la sensibilité de la trajectoire subit aussi un changement algébrique instantané. Le saut de sensibilité pendant l'événement discret est donné par :

$$\Phi^+ = Dh(x^-)\Phi^- - [f(x^+) - Dh(x^-)f(x^-)]\tau_{x_0} \quad (2.19)$$

avec $Dh = \frac{\partial h}{\partial x}$ est la matrice Jacobiënne de la fonction h par rapport au vecteur des variable d'état x .

et

$$\tau_{x_0} = -\frac{\nabla s(x^-)\Phi^-}{\nabla s(x^-)f(x^-)}$$

ou $\nabla s = \frac{\partial s}{\partial x}$ est la gradient de la fonction $s(x)$

On rappelle que les indices " - " et " + " font référence respectivement au valeurs juste avant et juste après l'impact.

Une forme plus générale des équations (2.18) et (2.19) pour les systèmes hybrides possédant des variables d'état continues et discrètes est présentée dans [HP00].

2.6 Résultats numériques

Le robot bipède type compas étudié admet des cycles limites passifs lors de sa marche sur des petites pentes (voir [McG90b]). Ces allures périodiques passifs s'avèrent être stables. En effet, soumis à des petites perturbations, le robot ne tombe pas et sa trajectoire converge vers celle du cycle limite.

2.6.1 Conditions de la simulation

Soit le robot compas représenté dans la figure 2.2, et d'équation d'état (2.3). On le pose sur un sol incliné de la ligne horizontale d'un angle φ . Le couple u appliqué à l'entrée est nul, la seule source d'énergie pour le robot est le changement de l'énergie potentielle dû à la pente.

Les paramètres utilisés dans la simulation du compas sont données par le tableau 2.1.

2.6.2 Cycle limite passif du robot compas :

On applique la méthode itérative de Newton Raphson pour calculer le point fixe de l'application de Poincaré. Ce qui constitue une condition initiale du cycle limite passif du robot.

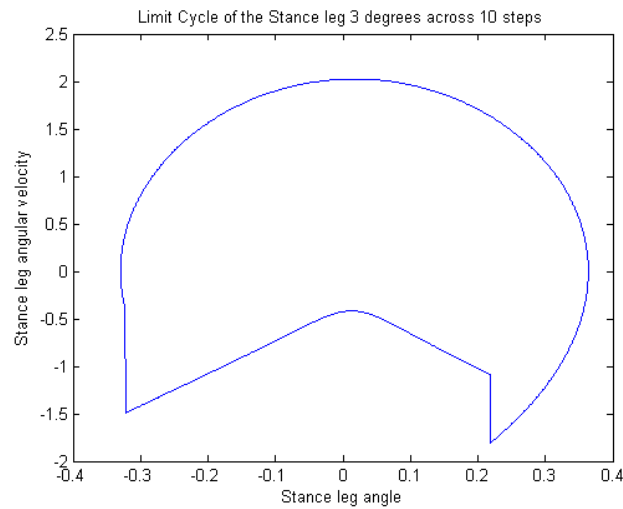
Si on commence par un vecteur des conditions initiales proches de celles du cycle limite, la méthode itérative de Newton-Raphson converge vers le point fixe suivant :

$$x^* = [-0.323389; 0.218669; -0.377184; -1.091827]$$

Une représentation du cycle limite passif du robot compas est donnée par la figure 2.5.

Paramètre	Valeur	Unité	Définition
m	5	kg	Masse de chaque patte
m_H	10	kg	Masse de la hanche
a	0.5	m	Distance entre le pied et la masse m
b	0.5	m	Distance entre le hanche et la masse m
$l = a + b$	1	m	Longueur de la patte
g	9.8	m/s^2	Accélération de la gravité
φ	3	deg	Angle d'inclinaison du sol

Tableau 2.1: les paramtres gomtriques du robot type-compass

Figure 2.5: Cycle limite passif du robot compass sur une pente de 3°

$\Phi(x^*, T)$	1.0000	-0.1997+j0.5445	-0.1997-j0.5445	0.1316
$DP(x^*)$	0.0000	-0.1997+j0.5445	-0.1997-j0.5445	0.1316

Tableau 2.2: Les multiplicateurs caractéristiques du cycle limite passif du robots type-compas pour une pente de 3 deg

2.6.3 Stabilité du cycle limite passif du robot compas

La méthode de sensibilité de la trajectoire a été utilisée pour déterminer la stabilité du cycle limite trouvé dans de la figure 2.5. Les valeurs propres de la matrice monodrome et de l'application de Poincaré sont données par le tableau 2.2

Comme prévu, l'une des valeurs propre de la matrice monodrome (multiplicateurs caractéristiques) est égale à 1, les autres coïncident avec celles de la jacobienne de l'application de Poincaré. Elles sont toutes à l'intérieur du cercle unité. Donc, on peut conclure que le cycle limite passif est stable.

2.6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les outils théoriques nécessaires pour l'étude des allures de marche passives d'un robot type-compas. Ainsi, en se basant sur la technique de modélisation exposée au Chapitre 2, nous avons dérivé les équations de la dynamique qui régissent le mouvement de marche du robot compas. En plus une modélisation du ce dernier avec l'hypothèse de système avec effet impulsives a été introduite. Par ailleurs, la marche passive a été décrite dans le plan de phase par la notion de cycle limite. La méthode de Poincaré ainsi que la théorie de sensibilité de la trajectoire ont été utilisées pour localiser de tels cycles limites et en étudier la stabilité. Cette technique a été appliquée avec succès au modèle simulé du robot compas.

Cependant, la marche passive sur un sol incliné s'avère très restrictive. En effet, les méthodes utilisées pour calculer les allures passives sur différentes pentes nécessitent, pour la plupart, une connaissance préalable du voisinage des configurations initiales de la marche. Ce qui n'est pas toujours évident surtout si la pente considérée est très éloignée de celle avec laquelle on a calculé le premier cycle passif. ([GTE98]). En plus les trajectoires obtenues par cette approche imposent certaines caractéristiques de la marche (Longueur de pas, période de pas et vitesse moyenne d'avancement) qui ne coïncident pas toujours avec ceux des allures désirées. D'où la nécessité de développer des lois de commandes pour palier à ces inconvénients. Le chapitre 3 sera consacré à ce sujet. En fait, On montrera que, tout en se basant sur le principe de la marche passive, on peut trouver des commandes non linéaires qui nous permettent de déterminer des allures périodiques de marche du robot compas dites "semi-passives" et caractérisées par des paramètres de la marche différents de ceux de la marche passive.

Chapitre 3

Commandes basées sur la passivité pour des allures de marche stables et optimales

3.1 Introduction

Afin de profiter de l'économie de l'énergie inérante à la marche passive sans pour autant être confronté à ses limitations (forte sensibilité des cycles limites passifs à la variation de l'angle de la pente et aux conditions initiales; et allure de marche imposée), Des chercheurs ont pensé à développer des lois de commande basées sur la passivité qui génèrent des cycle limites qu'on peut qualifier de semi-passifs. Certaines réalisations et études relatives à ce sujet ont été citées dans l'introduction du mémoire (§ 0.7).

Une approche de commande intéressante a été développée par Spong ([Spo99]) dans le but de résoudre le problème de la sensibilité du cycle limite par rapport à la variation de l'angle de la pente. En fait, il a exploité la marche passive d'un robot type compas sur une pente donnée, ainsi que les propriétés de symétrie du Lagrangien pour développer une loi de commande permettant au robot d'atteindre un cycle limite de marche stable pour différentes pentes. L'approche a pu être appliquée avec succès pour des pentes positives, négatives et sur un sol plat.

Dans cette optique, on se propose de développer une approche analytique qui génère des allures périodiques pour le robot type-compas caractérisées par diverses vitesses d'avancement. En effet, en se basant sur la passivité et sur la théorie du modelage de l'énergie (energy shaping), on montre, qu'à partir d'un cycle limite passif prédéterminé et caractérisé par une énergie donnée, on peut définir une loi de commande et une configuration initiale qui permettent à la trajectoire du robot d'atteindre un autre cycle limite de vitesse différente.([LMMA06]).

En plus, en utilisant un critère énergétique adéquat, La combinaison des deux commandes (Licer et Spong) nous permettra de trouver, pour chaque pente, la vitesse optimale à adopter

par le robot afin de minimiser les pertes énergétiques lors de la marche.

On commence d'abord par poser la base théorique sur laquelle repose l'approche de commande que nous avons conçu. Cette dernière sera ensuite établie et suivie d'une validation par le biais des résultats de simulation. Puis, la commande développée par Spong et celle résultante de la combinaison des deux approches (Licer et Spong) seront présentées. La dernière section sera consacrée à la procédure d'optimisation et à l'analyse des résultats de simulations obtenus.

3.2 Base théorique

Dans cette section, on va passer en revue quelques notions théoriques de la géométrie différentielle et de la modélisation des systèmes mécaniques qui nous seront utiles pour construire l'approche de commande proposée.

3.2.1 Elements de géométrie différentielle

Le but de ce paragraphe est d'introduire une proposition énoncée par Marsden dans [MR99]. Cette proposition sera à l'origine de notre analyse sur les cycles limites, Elle stipule que deux systèmes de même structure et de propriétés physiques différentes peuvent avoir des cycles limites qui coïncident compte-tenu d'une reparamétrisation.

3.2.1.1 Définitions ([Mas00])

- Une *variété* P est un objet mathématique qui ressemble localement à \mathbb{R}^n et caractérisé par un système de coordonnées particuliers.

En effet pour tout $p \in P$, il existe un ouvert U de P contenant p et un homéomorphisme

$$\phi : U \longrightarrow W \subset \mathbb{R}^n$$

où W est un ouvert de \mathbb{R}^n .

On dit que n est la dimension de la variété P et (U, ϕ) est une *carte locale* de P .

Ainsi, pour tout $p \in U$, $\phi(p) \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire $\phi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$. On dit que $(x^1(p), \dots, x^n(p))$ sont les coordonnées de p dans la carte (U, ϕ) , appelées aussi coordonnées locales de p .

- Un *homéomorphisme* est une application bijective et continue dans les deux sens.
- Une *Variété symplectique* est une paire (P, Ω) avec P est une variété de dimension $2n$ et Ω est une 2-forme fermée et non dégénérée sur P .
- L'*espace tangent* de P au point p , noté T_pP est l'ensemble de tous les vecteurs tangents au point p .

- Une *2-forme différentiable* est une application de C^∞ qui à chaque point de P associe une application

$$\omega_p : T_p P \times T_p P \longrightarrow \mathbb{R}$$

- Le *fibré tangent* de P est l'ensemble défini par :

$$TP = \bigcup_{p \in P} (\{p\} \times T_p P)$$

- Un *champ de vecteur* X sur une variété P est une application de classe C^∞ qui, à tout point de P , associe un vecteur de TP (le fibré tangent de P) :

$$\begin{aligned} X : P &\longrightarrow TP \\ p &\longmapsto X(p) \in T_p P \end{aligned}$$

- Une *courbe intégrale* de X avec la condition initiale p_0 à $t = 0$ est une application différentiable $c :]a, b[\longrightarrow P$ tel que $]a, b[$ est un ouvert qui contient 0 et qui vérifie :

$$c'(t) = X(c(t)) , \quad c(0) = p_0$$

- Soit $\phi : P \rightarrow \mathbb{R}$ une application lisse sur une variété. Un réel r est une *valeur régulière* de ϕ si pour tout élément de $\phi^{-1}(r)$ la *différentielle* de ϕ est définie et non nulle.
- La *différentielle* de ϕ est l'application définie par :

$$\begin{aligned} d_x \phi : TP &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto d_x \phi(v) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right) (v_1 \dots v_n)^T \end{aligned}$$

3.2.1.2 Proposition 3.1

Soit (P, Ω) une variété symplectique de dimension fini, et H et K deux applications de $P \rightarrow \mathbb{R}$ ($H, K \in F(P)$). Supposons que $\Sigma = H^{-1}(h) = K^{-1}(k)$ avec $h, k \in \mathbb{R}$ sont des valeurs régulières de H et K respectivement. Alors les courbes intégrales des champs de vecteurs X_H et X_K , sur la sous variété Σ invariante pour X_H et X_K , coïncident sous une reparamétrisation.

La preuve de cette proposition se trouve dans [MR99]

3.2.2 Modélisation des systèmes mécaniques

3.2.2.1 Le formalisme Lagrangien

Soit un système mécanique conservatif à n degrés de liberté. Sa configuration géométrique est décrite par un vecteur de n coordonnées généralisées indépendant appartenant à la variété Q de dimension n . L'état du système est complètement définie par un élément (q, \dot{q}) du groupe tangent TQ . \dot{q} étant le vecteurs des vitesses généralisées.

La dynamique du système est régie par les équations d'Euler Lagrange (3.1) qui découlent du principe de la moindre action :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = 0 \quad (3.1)$$

tel que $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction scalaire appelé le Lagrangien du système et définie par

$$L = K - V \quad (3.2)$$

où V est l'énergie potentielle et K est l'énergie cinétique donnée par les équation d'Euler Lagrange :

$$K(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} \quad (3.3)$$

$M(q)$ est la matrice d'inertie du système.

La solution des équations (3.1) $q = q(t)$ définit la trajectoire désirée qui s'identifie à la trajectoire physique.

Champ de vecteur Lagrangien : On définit le champ de vecteur sur Q associé au Lagrangien et noté X_L :

$$\begin{aligned} X_L : \quad TQ &\longrightarrow T^2Q \\ (q, \dot{q}) &\longmapsto (\dot{q}, M^{-1}(-C\dot{q} - G)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

On note que l'image de $q \in Q$ par X_L n'est pas unique car par un point de l'espace de configuration peut passer plusieurs trajectoires du même système. Les courbes intégrales de ce champ de vecteur s'identifient alors aux solutions des équations d'Euler Lagrange (3.1) qui représentent les trajectoires du système.

3.2.2.2 Le formalisme canonique ou Hamiltonien

Dans le formalisme de Lagrange, on a vu que le système, de n degrés de liberté, est régi par des équations d'Euler lagrange de dimension n ; qui sont des équations différentielles du second ordre. Dans le formalisme canonique ou de Hamilton, le même système toujours décrit par q_i indépendants, est régi par $2n$ équations du premier ordre appelées équations d'Hamilton.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

avec $p = [p_1, \dots, p_n]^T$ est le vecteur des moments généralisés défini par :

$$p = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}}$$

et $H : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction Hamiltonienne définie par :

$$H(q, p) = \sum_{i=1, n} p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q})$$

et qui s'identifie à l'énergie totale du système mécanique et s'écrit comme suit :

$$H(q, p) = \frac{1}{2} p^T M^{-1}(q) p + V(q) \quad (3.6)$$

Champ de vecteur Hamiltonien : On note X_H le champ de vecteur sur $Q \times Q$ associé à H et défini par

$$\begin{aligned} X_H : Q \times Q &\longrightarrow TQ^2 \\ (q, p) &\longmapsto \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Les courbes intégrales de ce champ de vecteur s'identifient alors aux solutions des équations de Hamilton (3.5).

Remarque 3.1 *Les deux formalismes précédents étant équivalents, les courbes intégrales des champs de vecteurs associés respectivement au Lagrangien (3.4) et au Hamiltonien (3.7) sont identiques.*

3.2.3 Courbes intégrales et énergie

Lemme 3.1 :

Soit $T \in \mathbb{R}$ et c une courbe intégrale du champ de vecteurs X_L (3.4) définie par :

$$\begin{aligned} c :]0, T[&\rightarrow TQ \\ t &\mapsto c(t) = (q(t), \dot{q}(t)); \quad c(0) = (q_0, \dot{q}_0) \end{aligned}$$

La trajectoire du système associée à cette courbe intégrale est caractérisée par une énergie mécanique constante E_0 telle que $E_0 > V_0(q)$; $V_0(q)$ étant l'énergie potentielle du système.

Soit e un réel strictement positif, alors la courbe définie par :

$$\begin{aligned} d :]0, T[&\rightarrow TQ \\ t &\mapsto d(t) = c(et); \quad d(0) = (q_0, e\dot{q}_0) \end{aligned}$$

est une courbe intégrale de $X_{L_d=eL}$ caractérisée par une énergie $E_d = eE_0$.

Preuve :

Soit e un réel strictement positif.

On considère les Hamiltoniens associés au Lagrangiens L et L_d , qui sont des fonctions de l'ensemble $F(Q \times Q)$; notées respectivement $H(q, p)$ et $H_d(q, p)$ et d'expressions respectives :

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p + V(q) \quad (3.8)$$

et

$$H_d(q, p) = \frac{1}{2}p^T M_d^{-1}(q)p + V_d(q)$$

si on pose :

$$M_d(q) = \frac{1}{e}M(q) \quad (3.9)$$

et

$$V_d(q) = eV(q) \quad (3.10)$$

On alors obtient une relation entre $H(q, p)$ et $H_d(q, p)$ donnée par :

$$H_d(q, p) = eH(q, p) \quad (3.11)$$

Sachant que la fonction hamiltonienne s'identifie à l'énergie mécanique du système, donc afin d'appliquer la **Proposition 3.1** il faut montrer que $H^{-1}(E_0) = H_d^{-1}(eE_0)$ et que E_0 et eE_0 soient des valeurs régulières, respectivement de $H(q, p)$ et de $H_d(q, p)$.

1. D'après l'expression (3.11), il est clair que si on pose $H(q, p) = E_0$ on aura $H_d(q, p) = eE_0$, ce qui veut dire que les deux équations :

$$\frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p + V(q) = E_0 \quad (3.12)$$

$$\frac{1}{2}p^T M_d^{-1}(q)p + V_d(q) = eE_0 \quad (3.13)$$

sont équivalentes, et on suppose que

$$H^{-1}(E_0) = H_d^{-1}(eE_0) = \Sigma. \quad (3.14)$$

2. E_0 est une valeur régulière de H si pour tout $(q, p) \in \Sigma$ on a $dH(q, p) \neq (0, 0)^T$.

Soit $(q, p) \in \Sigma$. la différentielle de la fonction H est égale à :

$$\begin{aligned} dH(q, p) &= \left(\frac{\partial H}{\partial q}, \frac{\partial H}{\partial p} \right)^T \\ &= \left(\frac{\partial H(q)}{\partial q}, M^{-1}(q)p \right) \end{aligned}$$

Pour montrer que $dH(q, p) \neq 0$, il suffit de montrer que l'une de ses composantes est différente de 0. Sachant que d'après (3.14), on a :

$$\frac{1}{2}p^T M^{-1}(q)p + V(q) = E_0 \quad \forall (q, p) \in \Sigma$$

Ce qui implique que :

$$p^T M^{-1}(q)p = 2(E_0 - V(q)) > 0$$

Puisqu'on a $E_0 > V(q)$. Alors, on peut dire que :

$$M^{-1}(q)p \neq 0 \quad \forall (q, p) \in \Sigma$$

d'où :

$$dH(q, p) \neq (0, 0)^T \quad \forall (q, p) \in \Sigma \quad (3.15)$$

3. eE_0 est une valeur régulière de H_d si pour tout $(q, p) \in \Sigma$ on a $dH_d(q, p) \neq (0, 0)^T$.

Soit $(q, p) \in \Sigma$, la différentielle de la fonction H_d est égale à :

$$dH_d(q, p) = \left(\frac{\partial H_d}{\partial q}, \frac{\partial H_d}{\partial p} \right)^T$$

En utilisant (3.11), on obtient :

$$dH_d(q, p) = e dH(q, p)$$

alors d'après 3.15, on conclue que :

$$dH_d(q, p) \neq (0, 0)^T \quad \forall (q, p) \in \Sigma$$

En conclusion, la **Proposition 3.1**, nous affirme que les courbes intégrales des champs de vecteurs X_H et X_{H_d} coïncident sous une reparamétrisation.

Par ailleurs, en utilisant la définition du champ de vecteurs Hamiltonien (3.7), un simple calcul permet de conclure que X_H et X_{H_d} sont reliés par la relation suivante :

$$X_{H_d}(q, p) = e X_H(q, p) \quad (3.16)$$

Soit $c(t)$ une trajectoire solution de l'équation d'Euler-Lagrange (3.1), donc c'est une courbe intégrale et de X_L et par conséquent une courbe intégrale de X_H . Donc, elle vérifie :

$$c'(t) = X_H(c(t)), \quad c(0) = c_0$$

On pose $d(t) = c(et)$. on a alors :

$$d'(t) = (c(et))' = e c'(et) = e X_H(c(et)) = e X_H(d(t)) = X_{H_d}(d(t)).$$

Ce qui veut dire que $d(t) = c(et)$ est une courbe intégrale de X_{H_d} avec la condition initiale $d(0) = c(e \times 0) = c_0$. Donc elle vérifie l'expression suivante :

$$d'(t) = X_{H_d}(d(t)), \quad d(0) = c_0$$

Donc une trajectoire passant par c_0 et caractérisée par une énergie $E = eE_0, e > 0$ peut être générée par une reparamétrisation de la trajectoire $c(t)$ à énergie E_0 .

3.3 Allures pour différentes vitesses (Licer)

Le but de cette section est de modifier la vitesse d'avancement du robot bipède type compas, tout en gardant des allures de marche périodiques ([LMMA06]). Avant de présenter l'approche de commande proposée à cette effet, nous allons commencer, d'abord, par rappeler les équations de la dynamique du robot bipède type-compas pendant la marche, ensuite mettre en évidence la relation la dépendance de la vitesse d'avancement du robot bipède à son énergie mécanique totale, puis le résultat principal de cette section va être présenté sous forme d'un théorème. Enfin, en utilisant les notions théoriques de la section 3.2, nous allons détailler la démonstration de ce théorème.

3.3.1 Préliminaires

Soit un robot bipède type compas (Figure 3.1) dont la configuration est définie par un vecteur de coordonnées généralisées $q = \begin{bmatrix} \theta_{ns} & \theta_s \end{bmatrix}^T$ appartenant à la variété $SO(2)$. On pose les hypothèses suivantes :

- le robot est supposé planaire.
- Le plan de marche est incliné.
- La marche est cyclique et constituée de phases de simple support séparées par des impacts (pied/sol) instantanés.
- Le modèle d'impact est rigide.
- Le robot est complètement actionné.

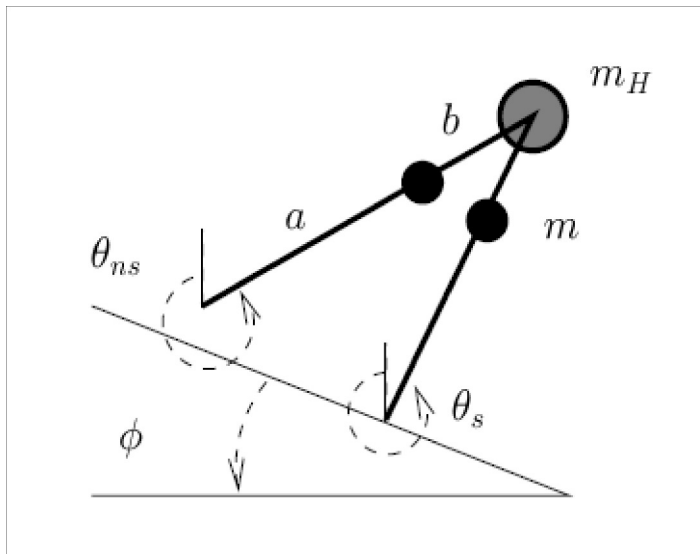


Figure 3.1: Le robot type compas

3.3.1.1 Phase de simple support

L'état du bipède est un élément (q, \dot{q}) du groupe tangent $TSO(2)$, $\dot{q} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{ns} & \dot{\theta}_s \end{bmatrix}^T$ étant le vecteur de vitesses généralisées. La dynamique du système pendant la phase de simple support est décrite par les équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = B(q)u \quad (3.17)$$

avec $u = \begin{bmatrix} u_H \\ u_s \end{bmatrix}$ le vecteur des couples moteurs au niveau de la hanche et de la cheville du robot.

$$\text{et } B(q) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

(3.17) peut se réécrire sous la forme suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)u \quad (3.18)$$

avec C est la matrice qui traduit les effets centrifuges et de Coriolis et G est le vecteur traduisant les effets de la gravité (les expressions de M , C et G sont données au § 2.1.2).

Remarque 3.2 Dans le cas de la marche passive ($u = 0$), (3.1) s'identifie l'équation différentielle associée au champs de vecteur X_L .

3.3.1.2 Instants d'impact

On assume que le contact pied-sol est inélastique et sans glissement, que le transfert de support entre la jambe en l'air et celle touchant le sol est instantané et que les couples moteurs sont nuls à l'instant d'impact. Dans ce cas, la configuration du robot ne change pas, alors que les vitesses articulaires présentent une discontinuité due à la discontinuité de l'énergie cinétique du système. La dynamique d'impact est obtenue par intégration des équations d'Euler-Lagrange (3.1) sur la durée infiniment petite de l'impact :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{\tau^-}^{\tau^+} = \int_{\tau^-}^{\tau^+} F(q, t) dt = W(\tau)$$

avec $W(\tau)$ représente la composante impulsive des forces de contact F pendant l'impact et τ l'instant où a lieu l'impact.

En plus, en utilisant (??) et (3.3) on a :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \Big|_{\tau^-}^{\tau^+} = \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} \Big|_{\tau^-}^{\tau^+} = M(q)(\dot{q}(\tau^+) - \dot{q}(\tau^-))$$

Par conséquent, les équations de la dynamique pendant l'instant d'impact τ sont les suivantes :

$$M(q)(\dot{q}(\tau^+) - \dot{q}(\tau^-)) = W(\tau) \quad (3.19)$$

3.3.1.3 Vitesse de progression et énergie

Dans ce paragraphe, on va mettre en évidence le changement de sa vitesse de progression quant à une modification de l'énergie mécanique totale du robot bipède pendant la marche.

L'énergie mécanique est définie par la somme de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned} E &= K + V \\ &= \frac{1}{2} \dot{q}^T M(q) \dot{q} + \int G(q) dq \end{aligned}$$

tel que $G(q)$ est l'accélération de gravité.

D'une part, il est évident que l'énergie cinétique dépend de la vitesse de progression du robot puisqu'elle s'écrit en fonction du vecteur des vitesses articulaires \dot{q} .

D'autre part, il a été démontré par McGeer ([McG90b]) qu'il existe une relation quadratique entre le vecteur $G(q)$ et la vitesse de progression parallèle au support de marche noté u .

$$G(q) = ku^2$$

Ainsi, on peut conclure que pour changer la vitesse de marche du robot bipède type-compas, on peut procéder à une modification de son énergie mécanique totale.

3.3.2 Résultat principal

Le résultat principal est donné sous forme de théorème.

Théorème 3.1 :

Soit le robot bipède décrit dans le paragraphe précédent. Supposons qu'il existe un cycle limite passif stable noté O_{ref} , caractérisé par une vitesse moyenne d'avancement v_0 , tel que le vecteur initial est donné par :

$$X_0 = [q(0), \dot{q}(0)]^T$$

Pour toute vitesse de progression désirée v_d , et avec la commande par rétro-action suivante :

$$u_e = B(q)^{-1}(1 - e^2) \frac{\partial V(q)}{\partial q} \quad (3.20)$$

$$= B(q)^{-1}(1 - e^2)G(q) \quad (3.21)$$

$V(q)$ étant l'énergie potentielle du robot, et $e = \frac{v_d}{v_0}$

Il existe un cycle limite *semi-passif* O_e dont le vecteur d'état initial peut être écrit en fonction de X_0 tel que:

$$X = [q(0), e\dot{q}(0)]^T$$

3.3.3 Démonstration du théorème 3.1

Puisque le robot bipède considéré est un système mécanique hybride, on va traiter séparément la phase de simple support (dynamique continue) et celle de l'impact du pied avec le sol (dynamique discrète). Toutefois, on commence par la détermination de la commande qui permet le modelage de l'énergie (energy shaping).

3.3.3.1 Calcul de la commande de modelage de l'énergie

Au voisinage de X_0 , toutes les trajectoires du robot bipède convergent vers le cycle limite passif O_{ref} . Ce dernier est caractérisé par une vitesse d'avancement v_0 . On suppose que l'on veut changer la vitesse d'avancement : la vitesse désiré est v_d . On appelle E_0 l'énergie mécanique totale du robot pendant la marche passive, et $E_d = \frac{v_d}{v_0} E_0$ l'énergie mécanique correspondante à v_d . Posons $e = \frac{v_d}{v_0}$. Donc le but est de trouver la commande qui permet de faire atteindre au système l'énergie désirée $E_d = eE_0$ (modelage de l'énergie mécanique totale).

Soient L and L_d les fonctions Lagrangiennes qui correspondent aux Hamiltoniens H et H_d , respectivement; Alors, l'équation dynamique du système désiré est :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_d(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L_d(q, \dot{q})}{\partial q} = 0 \quad (3.22)$$

ce qui est équivalent à :

$$M_d(q)\ddot{q} + C_d(q; \dot{q})\dot{q} + G_d(q) = 0 \quad (3.23)$$

Par ailleurs, d'après le paragraphe 3.2.3 pour avoir :

$$H_d(q, p) = eH(q, p) \quad (3.24)$$

Il suffit de poser

$$M_d(q) = \frac{1}{e} M(q) \quad (3.25)$$

et

$$V_d(q) = eV(q) \quad (3.26)$$

ce qui implique que :

$$C_d(q; \dot{q}) = \frac{1}{e} C(q; \dot{q}) \quad (3.27)$$

$$G_d(q; \dot{q}) = eG(q; \dot{q}) \quad (3.28)$$

Le système désiré est obtenu par application d'une commande par rétroaction au système original (passif); et la dynamique du système en boucle fermée s'écrit de la façon suivante

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q} = B(q)u \quad (3.29)$$

En écriture matricielle on a :

$$M(q)\ddot{q} + C(q; \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)u$$

D'après (3.28) on a l'identité :

$$eG_d(q) = e^2G(q) \quad (3.30)$$

Alors, et en tenant compte de (3.25), (3.27) et de (3.30), on obtient :

$$e(M_d(q)\ddot{q} + C_d(q; \dot{q})\dot{q} + G_d(q)) + G - e^2G = B(q)u_e \quad (3.31a)$$

Sachant que B est inversible (puisque le système est complètement actionné), alors en remplaçant (3.23) dans (3.31a), on obtient l'expression de la loi de commande (3.20) qui permet le modelage de l'énergie de E_0 vers $E_d = eE_0$.

3.3.3.2 Phase de simple support

Pendant la phase de simple support, l'énergie mécanique totale du système est une fonction continue et définie sur l'ouvert $]0, T_{step}[$. En plus il est facile de montrer que $E_0 = K_0 + V_0 > V_0$ par conséquent, d'après le **Lemme 3.1**, si

$$\begin{aligned} c :]0, T_0[&\rightarrow TSO(2) \\ t &\mapsto (q(t), \dot{q}(t)); \quad c(0) = (q_0, \dot{q}_0) \end{aligned}$$

est une trajectoire du robot type-compas solution de l'équation (3.17) avec $u = 0$ caractérisé par l'énergie mécanique E_0 , T étant l'instant d'impact. Alors, avec la commande par rétroaction (3.20), il existe une trajectoire solution de l'équation (3.23) caractérisé par à l'énergie $E_d = eE_0$. Cette nouvelle trajectoire est définie par :

$$\begin{aligned} d :]0, T_e[&\rightarrow TQ \\ t &\mapsto (q(et), e\dot{q}(et)); \quad c_e(0) = (q_0, e\dot{q}_0) \end{aligned}$$

avec T_e est le nouvel instant d'impact défini par :

$$T_e = \frac{T_0}{e}$$

Notons que les positions articulaires du robot bipède associées aux deux trajectoires sont identiques. Alors que les vitesses articulaires sont reliées par la formule suivante :

$$\dot{q}(t) = e\dot{q}(et) \quad \forall t > 0 \quad (3.32)$$

Vérification du changement de la vitesse d'avancement du robot type-compas :

La vitesse de progression du robot pendant la phase de simple support est égale à :

$$v = \frac{d}{T}$$

d étant la distance parcourue par la jambe de balancement définie par :

$$d = l(\sin(\theta_{ns} + \varphi) - \sin(\theta_s + \varphi))$$

avec φ étant l'angle de la pente du support de la marche.

On voit bien que d est fonction seulement des positions généralisées $q = [\theta_{ns}, \theta_s]^T$. Par conséquent on aura :

$$d_0 = d_e$$

En plus, puisque la vitesse est inversement proportionnelle à la durée d'un pas on a :

$$v_d = ev_0$$

tel que v_0 et v_d désignent les vitesses moyennes de progression du robot bipède qui caractérisent respectivement les cycles limites passif et semi-passif.

3.3.3.3 L'instant d'impact

Soient les deux trajectoires $c(t) = (q(t), \dot{q}(t))$ et $c_e(t) = (q_e(t), \dot{q}_e(t))$ définies dans § ???. On appelle τ et $\frac{\tau}{e}$ les instants d'impact de $c(t)$ et de $c_e(t)$, respectivement. Dans ce cas, à partir de (3.25) et de (3.32), on peut facilement montrer que :

$$M_d(q) \left(\frac{d(q_e(\frac{\tau^+}{e}))}{dt} - \frac{d(q_e(\frac{\tau^-}{e}))}{dt} \right) = M(q)(\dot{q}(\tau^+) - \dot{q}(\tau^-))$$

(3.19) implique que les forces impulsionnelles sont invariants sous la paramétrisation temporelle $t \rightarrow et$:

$$W(\tau) = W\left(\frac{\tau}{e}\right)$$

D'où l'invariance du changement de la vitesse dû au contact pied/sol. On écrit :

$$\Delta v_d = \Delta v$$

3.3.3.4 Conclusion

Ainsi, pour un robot bipède sur un sol incliné, s'il existe un cycle limite caractérisé par une vitesse de progression v_0 , il peut être reproduit pour d'autres vitesses v_d et ce en utilisant une commande active (3.20). Dans ce cas les deux cycles limites concident sous la reparamétrisation temporelle $t \rightarrow \frac{v_d}{v_0}t$.

3.3.4 Résultats de simulation

Le cycle limite de référence qu'on a choisi est celui trouvé au paragraphe 2.6.2. Les conditions initiales de ce cycle sont données par :

$$X_0 = \begin{bmatrix} -0.3234 & 0.2187 & -0.3772 & -1.0918 \end{bmatrix}^T$$

Alors, pour une vitesse de progression de robot désirée v_e , On définit le facteur de vitesse $e = \frac{v_e}{v_0}$.

Ainsi, le cycle limite correspondant à v_e et défini par le vecteur des conditions initiales suivant

$$X_e = \begin{bmatrix} -0.3234 & 0.2187 & -0.3772e & -1.0918e \end{bmatrix}^T$$

La loi de commande permettant de générer ce cycle limite est donnée par :

$$u = (1 - e^2)B^{-1} \begin{bmatrix} mgb \sin(\theta_{ns}) \\ -(m_H l + ma + ml)g \sin(\theta_s) \end{bmatrix}$$

Donc, pour différentes valeurs de v_e , on met en évidence de nouveaux cycles limites stables (figure.3.2). La figure 3.3 présente l'évolution de l'angle de non support et la figure 3.4 présente sa vitesse angulaire. Les signaux de commande nécessaires pour générer ces allures de marche sont données par la figure 3.5. Alors que la figure 3.6 montre l'effet de la commande sur l'énergie mécanique totale du système robotique.

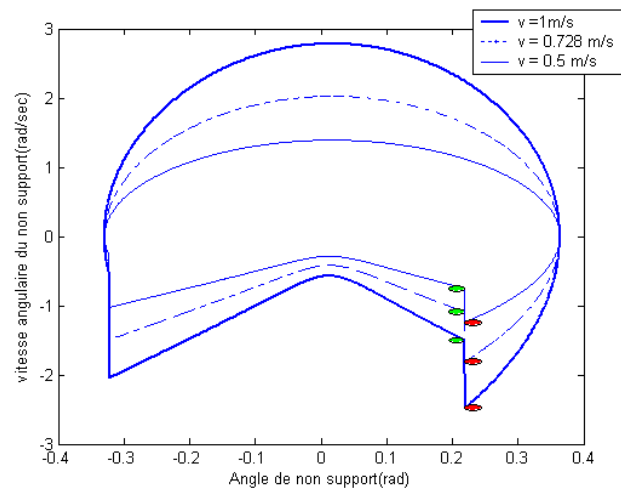


Figure 3.2: Cycles limites pour différentes vitesses d'avancement (pente= 3 deg)

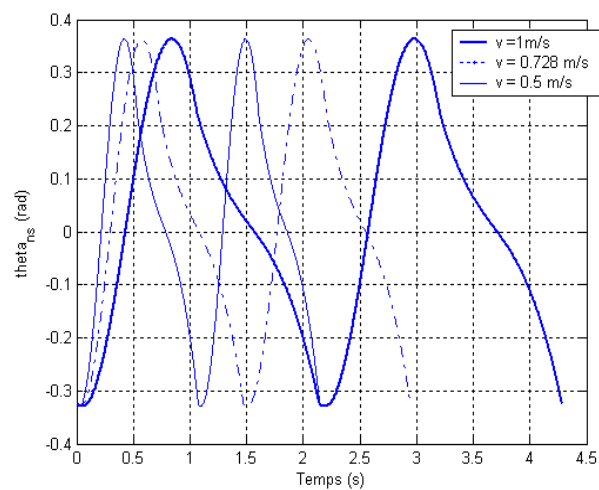


Figure 3.3: Evolution temporelle de l'angle de non support θ_{ns} pour différentes vitesses de progression (pente = 3 deg)

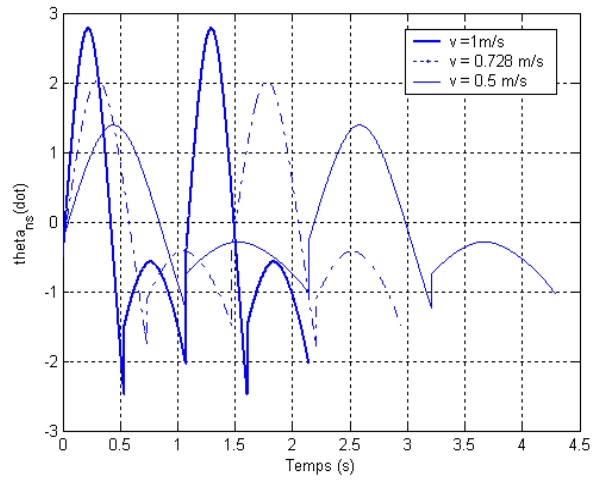


Figure 3.4: Evolution temporelle de la vitesse angulaire de non support $\dot{\theta}_{ns}$ pour différentes vitesses de progression (pente = 3 deg)

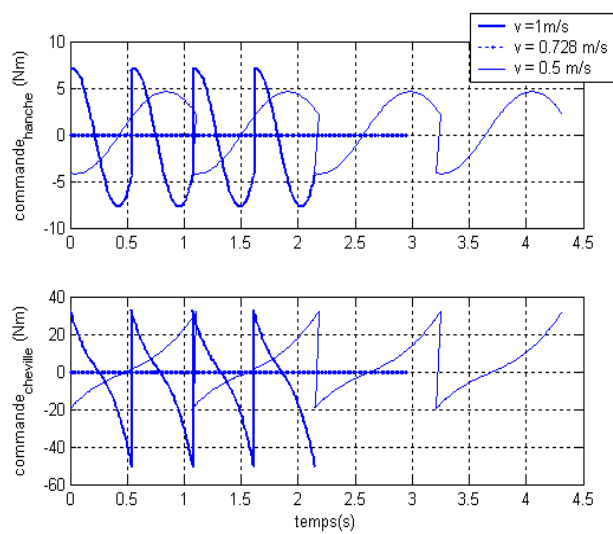


Figure 3.5: Signaux de commande pour différentes vitesses de progression (pente = 3 deg)

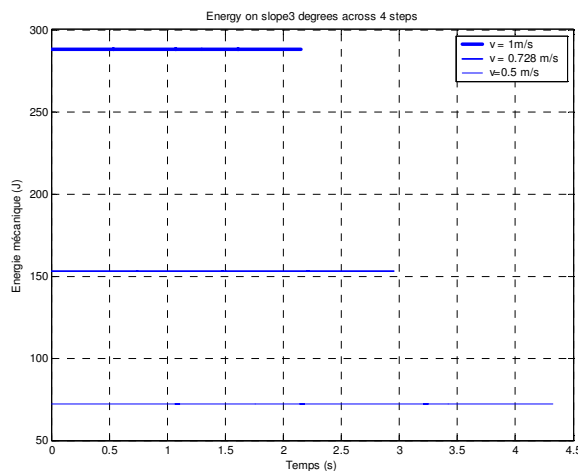


Figure 3.6: Energie mécanique du robot pour différentes vitesses de progression (pente = 3 deg)

3.4 Allures pour différentes pentes (Spong)

Dans [Spo99], Spong a développé une commande non linéaire basée sur la passivité qui rend les allures périodiques stables d'un robot type-compass invariantes par changement de pente : Il a montré qu'à partir d'un cycle limite passif de référence caractérisant la marche du robot sur une pente donnée, on peut déterminer de nouveaux cycles limites actifs pour différentes valeurs de pente. En effet, la commande permet de compenser la gravité générée par la nouvelle inclinaison du sol en modifiant l'énergie potentielle du robot (La théorie du modelage de l'énergie).

3.4.1 Loi de commande

Théorème 3.2

Soit le vecteur d'état initial :

$$\begin{aligned} X_0 &= \begin{bmatrix} q(0) & \dot{q}(0) \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \theta_{ns}(0) & \theta_s(0) & \dot{\theta}_{ns}(0) & \dot{\theta}_s(0) \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

Tel que, avec $u = 0$, il existe un cycle limite passif O_{ref} , correspondant à l'inclinaison de sol φ_0

Pour toute pente φ , on définit $\beta = \varphi_0 - \varphi$, On note R_β la rotation de deux dimensions de l'angle β . Dans l'espace cartésien, R_β est défini par la représentation matricielle suivante :

$$R_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

Alors que dans l'espace de configuration du robot type compas, R_β est représenté par l'opérateur suivant :

$$R_\beta(q) = (\theta_{ns} - \beta, \theta_s - \beta)$$

Par abus de notation, on va utiliser R_β pour les deux représentations.

Soit V l'énergie potentielle du robot et $P_\beta = V \circ R_\beta$ et $G_\beta = \frac{\partial V_\beta}{\partial q}$

alors avec la commande par rétro-action suivante :

$$\begin{aligned} u_\beta &= B^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial q} - \frac{\partial V_\beta}{\partial q} \right) \\ &= B^{-1} (G - G_\beta) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Il existe un cycle limite stable O qui correspond à la pente ψ dont la configuration initiale est

$$X_0 = \begin{bmatrix} \theta_{ns}(0) + \beta & \theta_s(0) + \beta & \dot{\theta}_{ns}(0) & \dot{\theta}_s(0) \end{bmatrix}^T \quad (3.34)$$

Une extension de ce théorème pour le cas des robot bipèdes à n degrés de liberté tridimensionnelles se trouve dans [SB02].

Elements de démonstration

Le changement de pente définit un groupe d'action de $SO(2)$ sur l'espace de configuration du robot noté ϕ_A . Spong a démontré que l'énergie cinétique et la dynamique d'impact sont invariants par rotation. Alors pour assurer l'invariance du cycle limite sous ϕ_A , on a besoin de compenser l'énergie potentielle.

Pour une démonstration détaillée, le lecteur est invité à consulter l'analyse développée dans [SB02] appliquée au robot type-compas.

3.4.2 Résultats de simulation

Ainsi, le robot type-compas peut avoir des allures de marche périodiques sur des sols inclinés de pentes différentes, si on l'initialise avec des conditions initiales adéquates (3.34) et on lui applique la commande développée par Spong dont l'expression explicite en fonction des paramètres du robot est donnée par :

$$u = B^{-1} g \left(\begin{bmatrix} mb(\sin \theta_{ns} - \sin(\theta_{ns} - \beta)) \\ -(m_H l + ma + ml)(\sin \theta_s - \sin(\theta_s - \beta)) \end{bmatrix} \right)$$

La figure 3.7 présente des cycle limites dans une surface plane, une pente descendante et une pente ascendante. La figure 3.8 présente l'évolution de l'angle de non support et la figure 3.9 présente sa vitesse angulaire. Les signaux de commande nécessaires pour générer ces allures de marche sont donnés par la figure 3.10. Alors que la figure 3.11 montre l'effet de la commande sur l'énergie mécanique totale du système robotique.

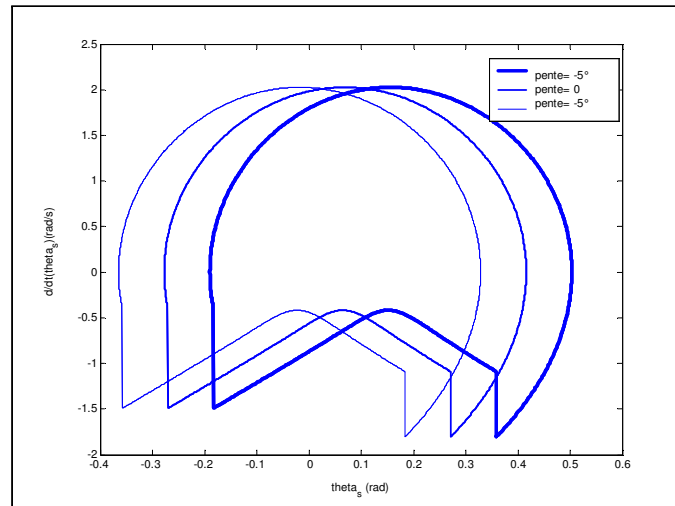


Figure 3.7: Cycles limites de marche du robot type-compas pour différentes valeurs de pentes ($v = 0.734 \text{ m/s}$)

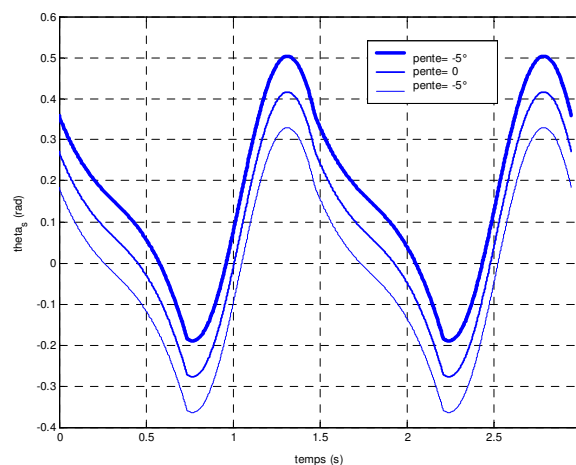


Figure 3.8: Evolution temporelle de l'angle de non support θ_{ns} pour différentes pentes ($v = 0.734 \text{ m/s}$)

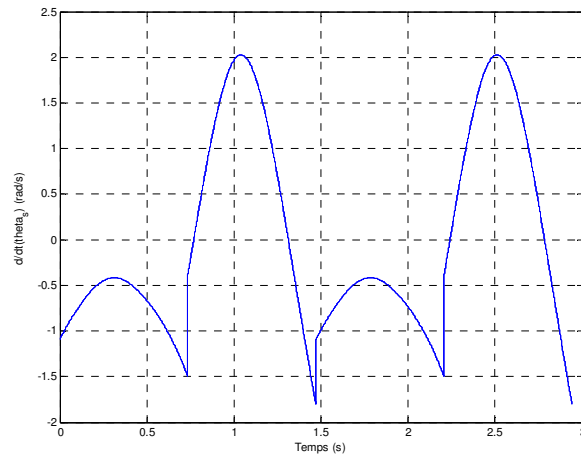


Figure 3.9: Evolution temporelle de la vitesse angulaire de non support $\dot{\theta}_{n_s}$ pour différentes pentes ($v = 0.734 \text{ m/s}$)

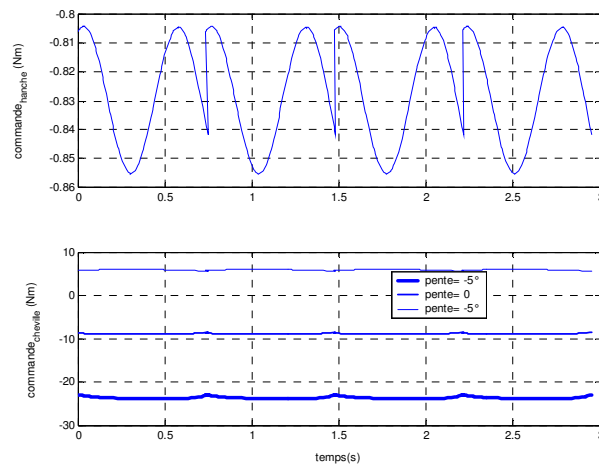


Figure 3.10: Signaux de commande pour différentes pentes ($v = 0.734 \text{ m/s}$)

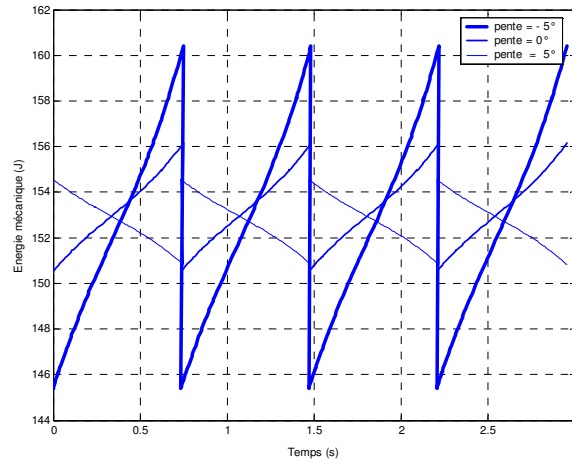


Figure 3.11: Energie mécanique du robot pour différentes pente ($v = 0.734 m/s$)

3.5 Allures pour différentes pentes et vitesses (Combinaison des deux commandes Licer et Spong)

3.5.1 Résultat principal :

Théorème 3.3 : ([LAM06])

On se pose les mêmes conditions et les mêmes notations que dans les théorèmes 3.1 et 3.2.

Pour toute pente $\varphi = \varphi_0 - \beta$, et pour toute vitesse de progression désirée $v_d = ev_0$, et avec la commande par rétro-action suivante :

$$u_{e\beta} = B^{-1} \left(\frac{\partial V(q)}{\partial q} - e^2 \frac{\partial V_\beta(q)}{\partial q} \right) \quad (3.35)$$

Le robot type compas admet un cycle limite stable et le vecteur :

$$X_0 = \left[\theta_{ns}(0) + \beta \quad \theta_s(0) + \beta \quad e\dot{\theta}_{ns}(0) \quad e\dot{\theta}_s(0) \right]^T$$

varie dans son bassin d'attraction.

Par conséquent, on peut trouver une variété de cycles limites de marche stables. Chaque cycle limite est paramétré par la vitesse de progression et l'angle de la pente.

3.5.2 Démonstration :

A partir d'un cycle limite passif, pour une même longueur de pas, si on veut que le robot marche sur une pente φ à une vitesse v . Il suffit d'appliquer à ses articulations la composée des deux

couples de commande (3.33) et (3.20) présentées dans les paragraphes 3.3 et 3.4.

En effet, pour une pente $\varphi \neq \varphi_0$, on applique la commande

$$u_\beta = B^{-1}(G - G_\beta)$$

G_β est définie par le Théorème 3.2. La dynamique du système sera alors, égale à l'équation matricielle suivante :

$$M(q)\ddot{q} + C(q; \dot{q})\dot{q} + G_\beta(q) = 0$$

A présent, si on veut que le robot marche avec une vitesse désirée $v = ev_0$, il suffit d'appliquer la loi de commande (3.36) qui résulte de l'identification des deux équations suivantes :

$$M(q)\ddot{q} + C(q; \dot{q})\dot{q} + G_\beta(q) = B(q)v$$

et

$$\frac{1}{e}M(q)\ddot{q} + \frac{1}{e}C(q; \dot{q})\dot{q} + eG_\beta(q) = 0$$

Alors :

$$v = B^{-1}(1 - e^2)G_\beta \quad (3.36)$$

Par conséquent, la commande résultante est donnée par :

$$\begin{aligned} u_{e\beta} &= u_\beta + v \\ &= B^{-1}(G - e^2G_\beta) \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à la commande (3.35).

Remarque 3.3 *Il est facile de voir que si la pente est égale à celle du cycle limite passif ($\varphi = \varphi_0$) on aura $u_{e\beta} = u_e$ (3.20). Alors que si on ne cherche pas à faire varier la vitesse du robot type-compas ($v_d = v_0$), on aura $u_{e\beta} = u_\beta$ (3.33).*

3.5.3 Stabilité de la marche semi-passives :

Avec l'approche de commande définie par le **Théorème 3.3**, la cyclicité de la marche du robot type compas résultante de sa dynamique intrinsèque, n'est plus sensible à la variation de l'angle d'inclinaison du support de marche et ne pose plus de contrainte sur la vitesse de marche du robot. Par ailleurs, la stabilité des orbites périodiques associés aux trajectoires de marche semi-passives obtenues est assurée puisque ces dernières sont identiques aux trajectoires passives compte-tenu d'une reparamétrisation. Dans les deux cas les cycles limites correspondants résulte

de la dynamique intrinsèque du robot type-compas. D'où l'appellation cycles limites "semi-passifs".

Compte-tenu de la **Remarque 3.3**, la même propriété est valable pour les approches de commande définies par les **Théorèmes 3.1** et **3.2**.

3.5.4 Résultats de simulation :

La commande qui permet de synthétiser des orbites périodiques de robot compas, chacune caractérisée par une pente et une vitesse d'avancement données, est exprimée explicitement par :

$$u_{e\beta} = B^{-1}g \begin{bmatrix} mb(\sin \theta_{ns} - e^2 \sin(\theta_{ns} - \beta)) \\ -(m_H l + ma + ml)(\sin \theta_s - e^2 \sin(\theta_s - \beta)) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

La figure 3.12 présente des exemples de cycles limites qui correspondent à des valeurs de pentes et des vitesses d'avancement différentes. La figure 3.13 présente l'évolution de l'angle de non support et la figure 3.14 présente sa vitesse angulaire. Les signaux de commande nécessaires pour générer ces allures de marche sont données par la figure 3.15. Alors que la figure 3.16 montre l'effet de la commande sur l'énergie mécanique totale du système robotique.

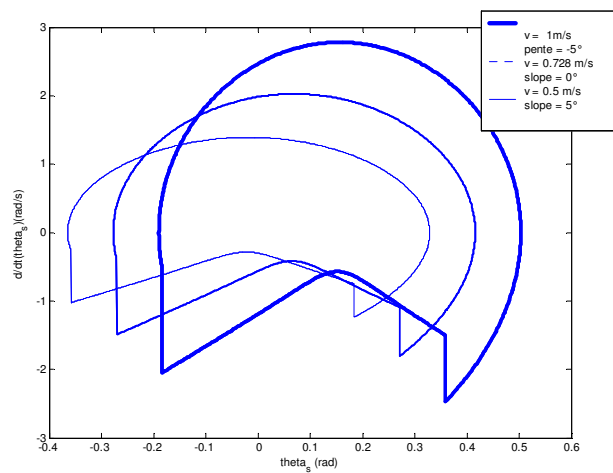


Figure 3.12: Cycles limites du robot type-compas pour différentes vitesses et pentes

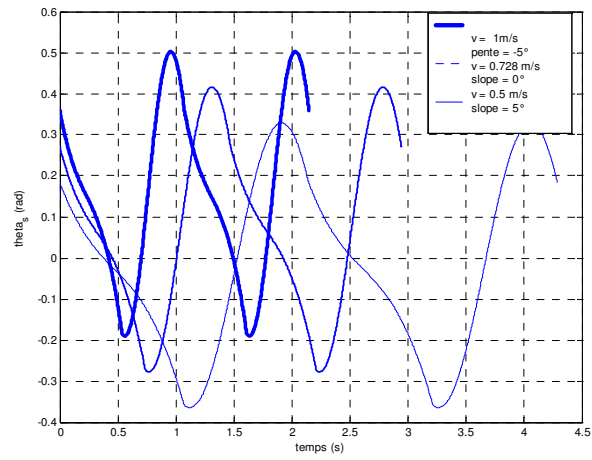


Figure 3.13: Evolution temporelle de l'angle de non support θ_{ns} pour différentes vitesses de progression et de pentes

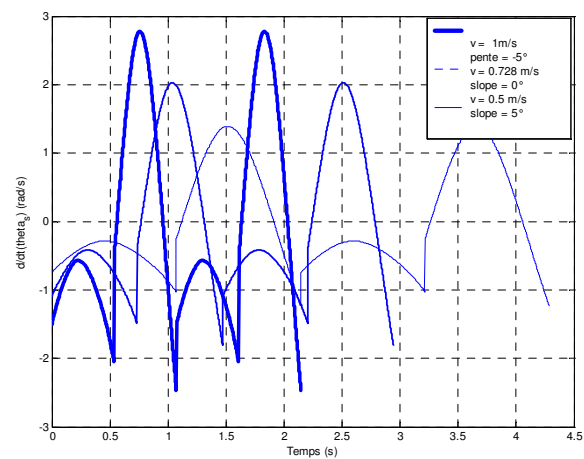


Figure 3.14: Evolution temporelle de la vitesse angulaire de non support $\dot{\theta}_{ns}$ pour différentes vitesses de progression et différentes pentes.

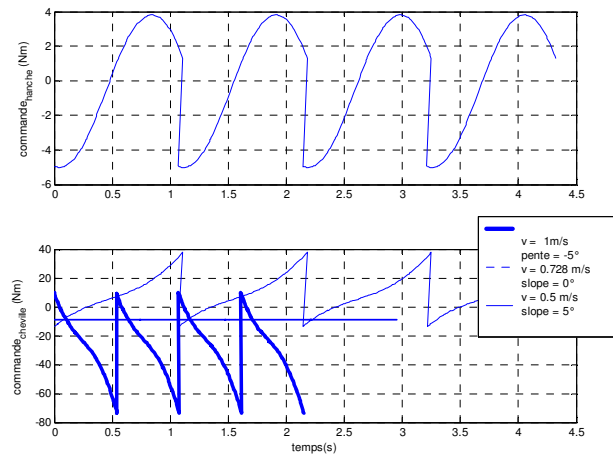


Figure 3.15: Couples de commande pour différentes vitesses de progression et différentes pentes.

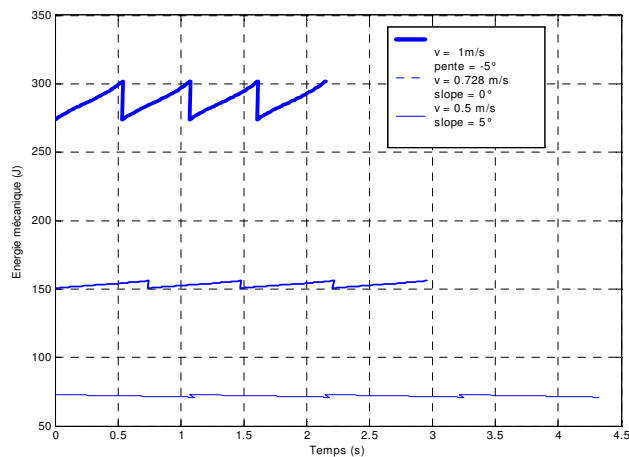


Figure 3.16: Energie mécanique du robot pour différentes vitesses de progression et différentes pentes

3.6 Vitesse optimale pour une pente donné

3.6.1 Introduction

Comme pour tous les systèmes autonomes, le problème de l'énergie embarquée lors de la marche d'un robot bipède est une question cruciale. On cherchera toujours à privilégier les commandes qui minimisent les demandes énergétiques et par conséquent accroissent l'autonomie du système.

Or, un robot qui se trouve sur un cycle passif marche sans consommer d'énergie. Il est donc naturel de chercher à l'imiter. Dans la section 3.5, on a développé une commande qui permet au robot type-compas marchant sur des pentes différentes de réaliser des allures de marche périodiques pour différentes vitesses d'avancement. En effet, la trajectoire du robot converge vers des cycles limites stables qui sont proches des cycle limite passifs.

Par ailleurs, si on observe de plus près la marche humaine, on remarque qu'en l'absence de contraintes, l'être humain se déplace à la vitesse naturelle qui varie de 1.24 à 1.59m/s selon les personnes, cette vitesse minimise la dépense d'énergie du marcheur. Ces dernières se mesurent par le rapport ([Ale83]):

$$\text{Coût énergétique} = \text{énergie utilisée} / (\text{poids du corp} \times \text{distance parcourue}).$$

Le coût énergétique peut être défini comme l'énergie d'alimentation consommée : *coût métabolique de transport* ou sous la forme du travail mécanique fourni : *coût mécanique de transport*. La mesure de la consommation d'oxygène dans la marche humaine montre que pour la vitesse la plus économique (environ 1.3m/s), le coût métabolique est d'environ 0.2. Alors que le coût mécanique de transport correspondant est d'environ 0.05 ([Mar76]).

Ainsi, en s'inspirant de cette propriétés de la marche humaine, on peut conclure que la marche optimale pour un robot bipède est celle qui minimise l'énergie dépensée par les couples de la commande aux niveaux des actionneurs du système. Et que l'allure optimale du point de vue énergétique est caractérisée par une vitesse bien déterminée. Donc, si on suppose que le robot marche sur un plan incliné, on peut imaginer que pour chaque valeur de l'angle de la pente, il existe une valeur spécifique de la vitesse qui caractérise la marche optimale du robot.

Dans ce qui suit, on se propose de calculer la vitesse optimale pour chaque valeur de l'angle d'inclinaison du support de marche en utilisant une optimisation numérique basée sur la programmation non linéaire.

3.6.2 Fonction coût

Sachant qu'une marche optimale du robot bipède est celle qui minimise ses dépenses énergétiques. Pour obtenir ce type de marche, on définit un critère de performance à minimiser et qui reflète l'énergie injectée par les couples des actionneurs liées aux différentes articulations du robot. Ainsi, on choisit d'utiliser le coût mécanique de transport donné par l'expression suivante :

$$J = \frac{1}{Pd_{tr}} \int_0^{T_{tr}} \left| \dot{q}^T B u \right| dt \quad (3.38)$$

avec $\int_0^{T_{tr}} \left| \dot{q}^T B(q) u \right| dt$ représente le travail mécanique des actionneurs.
 $P = g * (2m + m_H)$ est le poids du corps du bipède.
 d_{tr} est la distance horizontale parcourue pendant la durée T_{tr} .

3.6.3 Formulation du problème d'optimisation :

3.6.3.1 Préliminaires

Soit $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, nous désirons obtenir la vitesse optimale v_φ^* que doit adopter le robot bipède type-compas marchant sur un plan incliné de pente φ afin de minimiser ses dépenses énergétique exprimée par le coût

$$J = \frac{1}{PL_{pas}} \int_0^{T_{pas}} \left| \dot{q}^T B u \right| dt$$

tel que sa trajectoire de marche correspond à un cycle limite stable.

On considère C_0 un cycle limite passif ($u = [0 \ 0]^T$) du robot type-compas marchant sur un sol incliné de pente φ_0 défini par son vecteur initial :

$$X_0 = \left[\theta_{ns}^0 \quad \theta_s^0 \quad \dot{\theta}_{ns}^0 \quad \dot{\theta}_s^0 \right]^T \quad (3.39)$$

Les caractéristiques de la marche passive sont donnée par : $T_{pas} = T_0$, $L_{pas} = L_0$ et $v_0 = \frac{L_0}{T_0}$.

On définit une trajectoire de marche périodique du robot type compas dont les caractéristiques de marche sont :

$$\begin{aligned} T_{pas} &= \frac{T_0}{e} \\ L_{pas} &= L_0 \end{aligned}$$

avec e un réel positif. Ce qui implique que la vitesse d'avancement du robot est obtenue par la formule suivante :

$$v = ev_0$$

On pose $\sqrt{=} = [0, v_{\max}]$ l'ensemble des vitesses admissibles par le robot type-compas sur une pente donnée, tel que v_{\max} dépend des caractéristiques technologiques de la plateforme du robot étudié. En général, la valeur maximale de la vitesse d'avancement d'un robot bipède est fonction de la vitesse de rotation maximale des actionneurs qui agissent sur les articulations du système, tout en tenant compte de l'effet du réducteur de vitesse s'il existe.

Par conséquent, on peut déterminer le domaine de définition du scalaire e qu'on note E avec :

$$E = \{e \in \mathbb{R}^{+*} \ / \ ev_0 \in \sqrt{\}\}$$

3.6.3.2 Formulation du problème d'optimisation:

Le problème d'optimisation est formulé sous la forme suivante :

Etant donné un vecteur de conditions initiales X_0 (3.39) et une longueur de pas L_0 (caractérisant un cycle limite passif) ainsi qu'un angle de pente φ , l'objectif est de trouver le facteur de vitesse optimale e^* qui minimise la fonction coût J sous la contrainte dynamique qui régit l'évolution du robot pendant un cycle de marche (une phase de simple support et un impact instantané). La commande u est définie par l'expression (3.35) qui permet au robot de marcher sur la surface de pente $\varphi = \varphi_0 - \beta$, suivant une allure périodique stable de vitesse $v = ev_0$. Une condition nécessaire pour réaliser cette allure est d'initialiser le robot bipède avec le vecteur

$$\begin{bmatrix} q & \dot{q} \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \theta_{ns}^0 + \beta & \theta_s^0 + \beta & e\theta_{ns}^0 & e\dot{\theta}_s^0 \end{bmatrix}^T$$

La formulation mathématique de cet objectif est donnée par (3.40a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{e \in E} J = \frac{1}{PL_0} \int_0^{\frac{T_0}{e}} \left| \dot{q}^T B u_{e\beta} \right| dt \\ \text{Sous} \quad \begin{cases} M(q)\ddot{q} + C(q;\dot{q})\dot{q} + G(q) = B u_{e\beta} \\ Q^+(\alpha)q^+ = Q^-(\alpha)\dot{q}^- \end{cases} \\ \text{avec} \quad u_{e\beta} = B^{-1}(G - e^2 G_\beta) \\ \quad \quad \quad \begin{bmatrix} q & \dot{q} \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \theta_{ns}^0 + \beta & \theta_s^0 + \beta & e\theta_{ns}^0 & e\dot{\theta}_s^0 \end{bmatrix}^T \\ \quad \quad \quad \beta = \varphi_0 - \varphi \\ \text{Et tant donné} \quad \begin{bmatrix} \theta_{ns}^0 & \theta_s^0 & \dot{\theta}_{ns}^0 & \dot{\theta}_s^0 \end{bmatrix}^T \\ \quad \quad \quad T_0; L_0; \varphi_0 \\ \quad \quad \quad \varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{array} \right. \quad (3.40a)$$

3.6.4 Approche de résolution :

Le problème exposé dans le paragraphe 3.6.3.2 relève de la théorie de l'optimisation paramétrique qui consiste à rechercher les paramètres optimaux d'une commande de structure imposée (par exemple les gains dérivé et intégral d'une commande PI) par minimisation d'un critère donné. Elle diffère de l'optimisation fonctionnelle, où l'on suppose au contraire que le contrôle est de structure complètement libre et la loi de commande qui sera appliquée à l'entrée du procédé peut être choisie arbitrairement ([Ost06]).

La réalisation d'une optimisation paramétrique de type (3.6.3.2) n'est pas une chose simple du fait de la complexité du problème. En effet, la fonction coût J ne peut pas être déterminée

explicitement, puisque l'évolution temporelle du vecteur des vitesses articulaires \dot{q} et celle de la commande $u_{e\beta}$ sont obtenues numériquement sous forme de vecteur de points à cause de la forte non linéarité du système et de son caractère hybride.

Par conséquent, nous avons opté pour une méthode de résolution numérique. En effet, on utilise une paramétrisation par des fonctions splines des données numériques issues de la résolution des équations algébro-différentielles de la dynamique du robot, afin de pouvoir effectuer l'intégration pour obtenir la fonction J . Le même type de paramétrisation est utilisé pour déterminer l'expression explicite de J en fonction du facteur de vitesse e , ce qui rend possible l'application de l'une des méthodes classique de l'optimisation pour la résolution de notre problème.

L'approche de résolution numérique est décrite par l'algorithme suivant :

1. Fixer l'angle de la pente ψ à une valeur donnée.
2. Fixer le facteur vitesse e à une valeur donnée. $e \in E$ qu'on suppose égale à un intervalle $E = [e_{\min}, e_{\max}]$.
3. Calculer numériquement la fonction $l = \dot{q}^T B u_{e\beta}$ sur l'intervalle $[0, \frac{T_0}{e}]$.
4. Procéder à une paramétrisation de la fonction $l(t)$ en l'approximant par des splines (polynomiales par morceaux).
5. Intégration de $l(t)$ entre 0 et $\frac{T_0}{e}$ pour obtenir la valeur du coût J .
6. Répéter les opérations 3, 4 et 5 pour différentes valeur de e .
7. Approximation par splines de la fonction $J(e)$.
8. e_{ψ}^* est obtenue par minimisation de $J(e)$.

3.6.5 Résultats de simulation :

L'approche est appliquée sur un robot type compas (figure 3.1) dont les paramètres sont données par le tableau 2.1 (§ 2.6.1).

On considère le cycle limite passif correspondant à la marche du robot sur un sol incliné de pente ψ_0 défini par son vecteur initial

$$X_0 = (-0.323389, 0.218669, -0.377184, -1.091827)^T$$

et dont les caractéristiques de la marche sont données par : $T_0 = 0.734s$, $L_0 = 0.535m$ et $v_0 = 0.7287m/s$.

En utilisant l'algorithme décrit au § 3.6.4, on détermine la valeur du facteur de vitesse optimale qui minimise les dépenses énergétiques lors de la marche, correspondant à chacune des valeurs de la pente appartenant à l'intervalle $[-20 \text{ deg}, 20 \text{ deg}]$.

Pour le calcul de J , on a choisi une méthode d'intégration numérique par la formule de Simpson récursive et adaptative : fonction QUAD. Pour la minisation du critère, on utilise la fonction FMINCON qui établit une optimisation non linéaire sous contraintes basée sur La méthode SQP.

La figure (3.17) présente l'allure du facteur de vitesse optimal e^* tel que e^*v_0 soit la vitesse optimale à adopter par le robot pour différents angles de la pente.

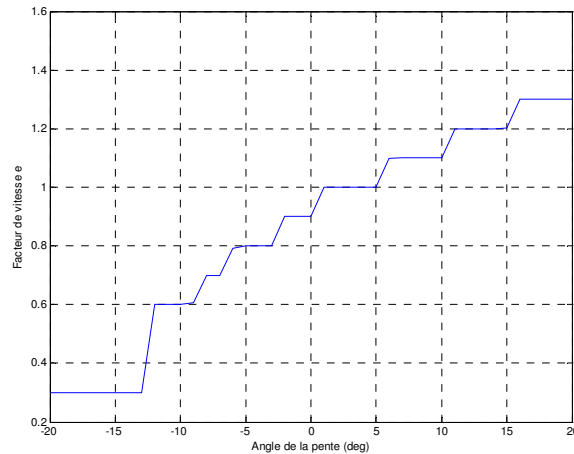


Figure 3.17: Le facteur de vitesse optimal en fonction de l'angle de la pente du sol

Si on analyse les données de la figure (3.17), la première observation est que la vitesse optimale évolue par paliers en fonction de la valeur de la pente.

On remarque aussi que pour les pentes ascendantes (angles positifs) la vitesse optimale augmente avec la pente. Cela apparaît logique car l'homme préfère accélérer dans les grandes pentes pour fournir le minimum d'effort.

Alors que pour les pentes descendantes (angles négatifs) la vitesse optimale décroît avec la pente. Et cela peut être expliqué par le fait que l'homme diminue sa vitesse dans la montée pour ne pas se fatiguer donc pour minimiser ses dépenses en énergie.

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé des approches de commande qui permettent de réaliser des allures périodiques avec des caractéristiques de marche différentes (différents pentes et différentes vitesses d'avancement) pour le robot bipède type compas. Ces approches se basent sur une propriété relevant de la dynamique intrinsèque de ce type de robot, dans le but de minimiser ses dépenses énergétiques. La validité des lois de commande que nous avons présentées est

vérifiée par des démonstrations théoriques en se basant sur des notions de géométrie différentielle ainsi que sur la théorie de modelage de l'énergie, mais aussi par des résultats de simulation satisfaisants. En plus, on utilise une méthode d'optimisation numérique pour calculer la vitesse optimale du robot pour un ensemble de valeur des pentes. Les vitesses optimales trouvées minimisent les dépenses énergétiques pendant la marche sur une surface inclinée. Ce qui implique une économie d'énergie et une amélioration de l'autonomie du robot.

Chapitre 4

Commandes basées sur la linéarisation exacte

4.1 Introduction

En général, la régulation des mouvements des systèmes robotique peut être abordée en considérant deux tâches principales :

- La planification de la trajectoire qui consiste à spécifier l'évolution temporelle en termes de coordonnées articulaires ou cartésiennes.
- Et l'élaboration d'une loi de commande qui implique la détermination des couples que doivent fournir les actionneurs afin de réaliser un mouvement particulier.

La réalisation de ces tâches pour le robot bipède n'est pas une chose facile. En fait ce dernier consiste en un système complexe du fait de sa forte non linéarité et de son caractère hybride (une dynamique discontinue exprimée par des équations algébro-différentielles) dû à l'avènement du phénomène d'impact du pied de balancement avec le sol.

Afin de diminuer un peu la complexité du système, on peut faire recours à sa linéarisation exacte (si toutes les articulations sont actionnées), ou partielle (sinon). En fait cette technique n'est pas totalement étrangère au domaine de la robotique car souvent utilisée pour des problèmes de poursuite de trajectoires articulaires pré-calculées des systèmes robotisés ([Spo87]) et connue dans la communauté des roboticiens sous l'appellation de commande par couple calculé (*computed torque control*). Quelques exemples relatifs à ce sujet ont été donnés dans l'introduction de ce mémoire.

Par ailleurs, Des chercheurs ont appliqué la technique de la linéarisation par feedback afin réaliser des allures de marche stables pour un robot bipède à trois degrés de liberté et deux entrées de commande ([KB93]). Ainsi, pour assurer le suivi de trajectoires désirées, différents types de commande ont été développées. On peut citer : la commande optimale quadratique

([Ers97]), la commande switching ([SLM00]) et la commande proportionnelle dérivée ([MS]).

Une approche de commande plus intéressante a été développée par Kondak et al. dans ([KH03a], [KH03b]). Les auteurs se sont basé sur les techniques de la linéarisation et du découplage pour réaliser des allures périodiques pour un robot bipède à 6 degrés de liberté (avec genoux et pieds). La stabilité des allures de marche est assurée par une régulation de la position du point à moment nul (ZMP).

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à la réalisation des allures de marche périodiques et stables du robot type-compass. Pour cela, On exploite le modèle du robot bipède hybride avec des effets impulsives ([GAP01]) et on procède à une linéarisation de la dynamique continue de la phase de simple support en utilisant la technique de linéarisation exacte par feedback. Deux objectifs de commande sont envisagés :

- Le premier consiste à assurer le suivi d'une trajectoire de référence pré-calculée correspondant à un cycle limite passif. avec une commande par placement de pôles classique qui utilise un proportionnel dérivé.
- Le second objectif est plus ambitieux, il consiste à faire subir aux articulations du robot une trajectoire cyclique stable tout en minimisant l'énergie fournie aux actionneurs ainsi que le durée du parcours pour des allures de marche rapides. Ce ci est rendu possible, grâce à la linéarisation exacte par feedback, par l'approche de commande à énergie minimale associée à un problème de minimisation de temps avec un critère quadratique (LQMT).

Par ailleurs, une analyse de la stabilité sera décrite pour chacune des deux approches, suivie de résultats de simulations correspondante au robot types-compass.

4.2 Linéarisation par feedback des systèmes non linéaires

Cette section est consacrée à une présentation brève de la technique de linéarisation par feedback des systèmes non linéaires. Ainsi, l'approche sera illustrée par un exemple simple avant de voir son application à la classe des systèmes représentés sous la forme canonique dont le robot type compass fait partie.

4.2.1 Introduction

Souvent, pour traiter les systèmes non linéaires, on procède à une linéarisation de leur dynamique. Ce qui permet d'appliquer aux systèmes non linéaires les méthodes de commande propres aux systèmes linéaires (Placement de pôles, commande à énergie minimale ...etc). Et ce pour des fins de stabilisation de point d'équilibre, de suivi de trajectoires ou d'analyse de la stabilité. Parmi les techniques de linéarisation, on cite :

- L'approche conventionnelle qui se base sur une approximation de l'équation différentielle du système par sa série de Taylor. Elle consiste à négliger les termes de la série dont l'ordre est inférieur à 2. Cependant, ce n'est qu'une linéarisation locale car l'approximation est faite au voisinage d'un point de fonctionnement nominale (point d'équilibre par exemple). Ce qui fait que la commande développée ainsi n'est plus valable si le point de fonctionnement change. Ce problème apparaît surtout si le système possède plusieurs points de fonctionnement.
- La linéarisation par feedback est une technique qui a suscité l'intérêt des chercheurs ces dernières années. Elle est l'une des plus importantes applications de la théorie de la géométrie différentielle. L'idée centrale de l'approche est de transformer algébriquement (d'une façon complète ou partielle) la dynamique d'un système non linéaire en une dynamique linéaire par le biais d'une commande non linéaire rétroactive et d'un changement (via un difféomorphisme) des variables d'état ([Vid78], [Ala96]). Malgré quelques limitations dont les problèmes associées font l'objet des recherches récentes, la linéarisation par feedback a été utilisée avec succès pour traiter quelques problèmes de commande pratiques : hélicoptères, avions à hautes performances, robots industriels et systèmes biomécaniques. D'autres applications industrielles sont en cours de développement.

4.2.2 Exemple intuitive

Sous sa forme la plus simple, la linéarisation par feedback consiste à annuler les nonlinéarités d'un système non linéaire de telle façon que le système en boucle fermée soit sous la forme linéaire. Cette idée simple est illustrée par l'exemple suivant :

On se fixe l'objectif de la régulation du niveau h d'un liquide dans un réservoir à un niveau souhaité h_d (figure 4.1). L'entrée de commande étant le flux entrant u et le niveau initial h_0 .

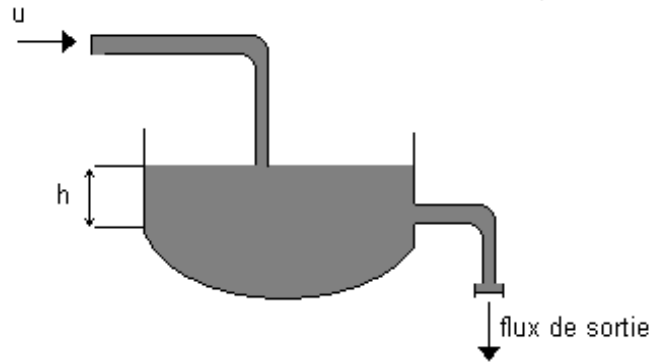


Figure 4.1: Régulation du niveau de liquide dans un réservoir

Le modèle dynamique du réservoir est donné par :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^h A(h) dh \right) = u(t) - a\sqrt{2gh} \quad (4.1)$$

avec $A(h)$ est la section du réservoir et a est la section de la pipette de sortie. Si le niveau initial h_0 est différent du niveau h_d , la commande de h implique un problème de régulation non linéaire.

Cependant, la dynamique (4.1) peut être réécrite de la façon suivante :

$$A(h)\dot{h} = u - a\sqrt{2gh}$$

Si on choisit

$$u = a\sqrt{2gh} + A(h)v \quad (4.2)$$

v étant une "entrée équivalente" à spécifier. Alors la dynamique résultante est linéaire :

$$\dot{h} = v$$

A présent en donnant à v l'expression suivante :

$$v = -\alpha\tilde{h} \quad (4.3)$$

avec $\tilde{h} = h(t) - h_d$ est l'erreur de niveau et α est une constante strictement positive. La dynamique en boucle fermée résultante est alors donnée par :

$$\dot{h} + \alpha\tilde{h} = 0 \quad (4.4)$$

Ce qui implique que $\tilde{h}(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$. Compte-tenu de (4.2) et (4.3), Le flux entrant est déterminé par la loi de commande non linéaire suivante :

$$u = a\sqrt{2gh} + A(h) - \alpha\tilde{h} \quad (4.5)$$

On note que, dans l'expression de la commande (4.5), le premier terme est utilisée pour fournir le flux sortant $a\sqrt{2gh}$ et le deuxième terme est utilisé pour (raise) le niveau du fluide selon la dynamique linéaire désirée (4.4).

De la même façon, si le niveau désiré est une fonction qui varie dans le temps $h_d(t)$. L'entrée équivalente peut être choisie de la sorte :

$$v = \dot{h}_d(t) - \alpha\tilde{h} \quad (4.6)$$

de façon à avoir encore $\tilde{h}(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$.

4.2.3 Les systèmes sous la forme canonique

L'idée de la linéarisation par feedback qui consiste à annuler les nonlinéarités et imposer un comportement linéaire désiré, peut être simplement appliquée à la classe des systèmes non linéaires décrite par la forme canonique de commandabilité. On dit qu'un système est sous la forme canonique si sa dynamique est représentée par l'équation suivante :

$$\dot{x}^{(n)} = f(X) + b(X)u \quad (4.7)$$

avec u est l'entrée de commande scalaire, x est la sortie scalaire, $X = \{x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}\}$ est le vecteur d'état. et $f(X)$ et $b(X)$ sont des fonctions non linéaires de la variable d'état. En fait, cette forme est unique puisque, malgré que les dérivées de x apparaissent dans cette équation, aucune dérivée de l'entrée u n'y est présente. La représentation dans l'espace d'état de (4.7) s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ f(X) + g(X)u \end{bmatrix}$$

Si $b \neq 0$, on utilise la commande suivante :

$$u = \frac{1}{b}(v - f)$$

Pour annuler les nonlinéarités et obtenir une relation simple entre l'entrée et la sortie (la forme multi-intégrateur)

$$x^{(n)} = v \quad (4.8)$$

L'approche décrite ci-dessus est communément appelée linéarisation exacte ou linéarisation état-entrée. La commande linéaire v est déterminée suivant le but recherché. On distingue deux types de tâches :

- Stabilisation : Si on cherche à stabiliser le point d'équilibre $x = 0$, On pose :

$$v = -k_0x - k_1\dot{x} - \dots - k_{n-1}x^{(n-1)}$$

Les gains $k_i > 0, i = 1, 2, \dots, n-1$ sont choisis de façon à ce que le polynôme

$$Q(p) = p^n + k_{n-1}p^{n-1} + \dots + k_0$$

ait tous ses pôles à parties réelles négatives. (problème de placement de pôles).

Alors la dynamique (4.8) est exponentiellement stable. Ce qui implique que $x(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$.

- Problème de poursuite : Si on souhaite que le système suit une trajectoire désirée $x_d(t)$. Alors la loi de commande :

$$v = x_d(t)^{(n)} - k_0e - k_1\dot{e} - \dots - k_{n-1}e^{(n-1)}$$

$e(t) = x(t) - x_d(t)$ étant l'erreur de poursuite, implique une convergence exponentielle de $x(t)$ vers $x_d(t)$. D'où $e(t) \rightarrow 0$ pour $t \rightarrow \infty$.

Des résultats similaires peuvent être obtenue si le scalaire x est remplacé par un vecteur et le scalaire b est remplacé par une matrice carrée inversible. Ainsi, l'approche de commande par linéarisation exacte peut être appliquée sur des systèmes robotiques représentés par des équations dynamiques Lagrangiennes comme on peut le voir pour le cas du robot bipède type-compas qui est un système à deux degrés de libertés (§ 4.3). En fait, cette technique est communément connue dans la communauté des roboticiens sous l'appellation de : Commande par couple calculé (*Computed Torque Control*).

4.3 Linéarisation exacte par feedback du robot type compas

On a vu dans le chapitres 2 que le robot bipède type-compas est un système mécanique hybride à événements impulsives, dont la dynamique de la phase de simple support est décrite par les équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = B(q)u \quad (4.9)$$

Les différents termes de cette équation sont donnés dans § 2.1.2.1.

Sachant que la matrice d'inertie M est non singulière, (4.9) est équivalente à :

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}) + g(q)u \quad (4.10)$$

avec

$$f(q, \dot{q}) = M^{-1}(q)(-C(q; \dot{q})\dot{q} - G(q))$$

et

$$g(q) = M^{-1}(q) * B$$

l'équation (4.10) est sous la forme canonique de commandabilité. En effet en choisissant le vecteur d'état suivant :

$$x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$$

et si on pose $x = [x_1, x_2]^T$, La représentation d'état de la dynamique du robot en simple support s'écrit de la façon suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ f(x) + g(x)u \end{bmatrix}$$

Alors, avec la loi de commande non linéaire suivante :

$$u = g^{-1}(x)(v - f(x)) = M(q)v + C(q; \dot{q})\dot{q} + G(q) \quad (4.11)$$

on peut annuler les nonlinéarités du système et on obtient une relation entrée-sortie simple

$$x_2 = \ddot{q} = v$$

On dit que le système est linéarisé et complètement découplé. Il est, à présent, équivalent à un ensemble de deux double-intégrateurs, avec v est la commande désignée à commander le nouveau système linéaire dont l'équation d'état est donnée par :

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (4.12)$$

A et B étant des matrices constantes égales à

$$A = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ 0_2 & 0_2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

avec

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } 0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Modèle complet du robot :

Aux instants d'impact τ_i (contact du pied de balancement avec le support de marche), la variable d'état x obéit à l'équation algébrique (4.13) qui décrit la dynamique d'impact du robot :

$$x(\tau_i^+) = h(x(\tau_i^-)) \quad (4.13)$$

l'expression de h est donnée dans § 2.1.3

Compte-tenu de (4.12), la dynamique complète du robot compas est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bv & t \neq \tau_i \\ x(\tau_i^+) = h(x(\tau_i^-)) & i = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (4.14)$$

La figure (4.2) montre que le modèle linéarisé du robot type-compas peut être décrit par deux systèmes bouclés : le robot et sa dynamique inverse qui calcule la commande linéarisante u (4.11).

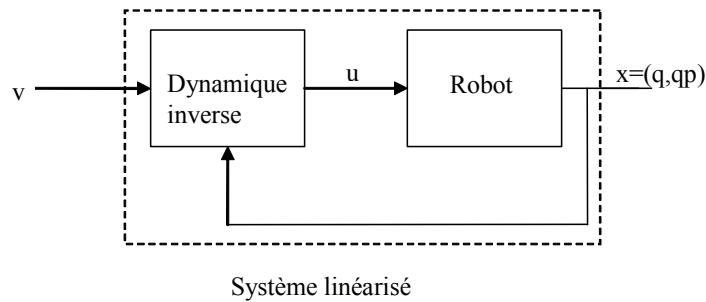


Figure 4.2: Linéarisation exacte du robot type-compas

Dans la suite, on se propose de développer des approches de commande qui permettent au robot type-compas de réaliser des trajectoires de marche périodiques. On signale que les lois de commande ne seront calculées que pendant les phases de simple support car on suppose que les actionneurs ne donnent pas de couples impulsives.

4.4 Suivi d'un cycle limite nominal pré-calculé

4.4.1 Loi de la commande

La commande linéaire est calculée de façon à stabiliser une trajectoire désirée pré-déterminée notée $(q^d(t), \dot{q}^d(t), \ddot{q}^d(t))$. Cette dernière correspond à un cycle limite stable passif ou semi-passif choisis parmi ceux générés par les commandes basées sur la passivité développées dans le chapitre 3. Cela pourrait minimiser les dépenses énergétiques pendant la marche.

Dans ce cas, on procède à une petite modification du vecteur d'état. En effet, on change x par l'erreur de suivi e telle que

$$e(t) = x(t) - x^d(t)$$

l'erreur obéit à l'équation linéaire suivante :

$$\dot{e} = Ae + Bv \quad (4.15)$$

avec la commande stabilisante suivante :

$$u = B(x) \left(v - f(x) + \ddot{q}^d(t) \right) \quad (4.16)$$

On choisit une commande par retour d'état proportionnelle-dérivée standard de la forme :

$$v_{PL} = -Ke \quad (4.17)$$

K étant la matrice de gains définie par :

$$K = \begin{bmatrix} -k_p & 0 & -k_d & 0 \\ 0 & -k_p & 0 & -k_d \end{bmatrix}$$

avec $k_p > 0$ et $k_d > 0$ sont respectivement le gain proportionnel et dérivé de la commande PD . Ils sont choisis de manière à ce que la matrice $A - BK$ donnée par (4.18) soit stable. D'où une convergence exponentielle de $x(t)$ vers la trajectoire de référence $x^d(t)$.

$$A - BK = \begin{bmatrix} 0_2 & I_2 \\ -k_p I_2 & -k_d I_2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

4.4.2 Analyse de la stabilité

L'une des propriétés fondamentales des systèmes dynamiques commandés est celle de la stabilité. L'analyse de la stabilité d'un système permet de prédire son comportement dans le temps. Dans le paragraphe précédent, on a vu qu'une commande simple type PD assure le suivi d'une

trajectoire de marche désirée d'un robot type-compas. Pour des raisons d'économie d'énergie, la trajectoire désirée correspond à un cycle limite stable passifs ou semi-passifs. Par conséquent la stabilité de l'allure de marche est assurée à priori.

Dans ce paragraphe, on développe une approche analytique qui permet de prouver la stabilité orbitale d'une trajectoire de marche périodique $x_d(t)$ en se basant sur la technique de stabilisation d'une trajectoire de référence développée plus haut. En fait, vu que pour des mécanismes hybrides comme les robots bipèdes, la stabilité des allures périodiques est plus intéressante que le suivi pure et simple d'une trajectoire pré-définie, on va montrer que la stabilité du cycle limite de référence (caractérisé par son vecteur d'état initial x_{init}), peut être établie par une modélisation discrète du système. Pour cela on a besoin d'abord de déterminer le modèle complètement linéarisé du robot bipède type compas.

4.4.2.1 Modèle complètement linéarisé

Pendant la phase de simple support, les équations qui régissent la dynamique du système sont données par :

$$\dot{e} = \tilde{A}e \quad (4.19)$$

e étant l'erreur de poursuite avec $e(t) = x(t) - x_d(t)$ et \tilde{A} est la matrice définie par

$$\tilde{A} = A - BK$$

Alors qu'aux instants d'impact du pieds de balancement avec le sol τ_k , la dynamique est régie par l'équation algébrique dont l'expression est donnée par (4.13). Sachant qu'on dispose de l'expression explicite de la fonction h , la linéarisation approximative de (4.13) peut être établie facilement autour d'un point noté x_{fd} défini par :

$$x_{fd} = x_d(T_{pas}^-)$$

avec T_{pas} la période d'un pas de marche. On obtient alors le modèle linéarisé de l'impact donné par :

$$e^+ = Dh(x_{fd})e^-$$

$Dh(x_{fd})$ étant le jacobien de h par rapport au vecteur de la variable d'état défini par $\frac{\partial h}{\partial x}(x)$ et calculé au point x_{fd} dans la suite, on pose :

$$Dh(x_{fd}) = Dh_d$$

les indices $' +'$ et $' -'$ désignent les valeurs juste avant et juste après l'impact respectivement.

Finalement, le modèle complètement linéarisé du robot bipède, pour le problème de suivi d'une trajectoire désirée, est donné par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{e} = \tilde{A}e & \text{pour } t \neq \tau_k \\ e(\tau_k^+) = Dh_d e(\tau_k^-) & \text{pour } t = \tau_k \end{cases} \quad (4.20)$$

avec $\tau_k = kT_{pas}$. représente l'instant d'impact.

4.4.2.2 Stabilité orbitale

Du fait du caractère cyclique de la trajectoire de référence à suivre, et en nous inspirant du principe de la methode de Poincaré (§ 2.4.1), la stabilité de $e = 0$ peut être analysée en utilisant un modèle de représentation discret.

Soit $e(t)$ une trajectoire solution du système linéaire hybride invariant dans le temps (4.20) avec $e(t_0) = e_0$. Alors l'expression explicite du flux $\phi_e(t)$ est donnée par

$$\phi_e(t, t_0) = Dh_d e^{\tilde{A}(t-t_0)} e_0 \quad (4.21)$$

Soient $e(\tau_{k+1}^-)$ et $e(\tau_k^-)$ la valeurs respectives de $e(t)$ aux instants juste avant l'impact k et $k + 1$. On a d'après (4.21) :

$$e(\tau_{k+1}^-) = \phi_e(\tau_{k+1}^-, \tau_k^-) = e^{\tilde{A}(\tau_{k+1}^- - \tau_k^-)} Dh_d e(\tau_k^-) \quad (4.22)$$

avec τ_k et τ_{k+1} sont deux instant d'impact successives avec :

$$\tau_{k+1} - \tau_k = T_{pas}$$

On pose alors :

$$C = Dh_d e^{\tilde{A}T_{pas}}$$

On définit la variable discrete $e(k) = e(\tau_k^-)$. qui sera régie par l'équation algébrique suivante :

$$e(k+1) = Ce(k) \quad (4.23)$$

Ainsi, la stabilité exponentielle du point fixe $e = 0$ du système discret (4.23) pour $k \rightarrow \infty$ et par conséquent la stabilité orbitale du système continue (4.20) pour $t \rightarrow \infty$, peuvent être vérifiées d'une façon simple en examinant les valeurs propres de la matrice C .

D'une façon générale, le système (4.23) est stable autour de $e = 0$ si les modules de toutes les valeurs propres de la matrice C sont inférieurs à 1.

Une approche intéressante pour démontrer la stabilité au sens de Lyapunov de la trajectoire de marche du robot bipède type compas se trouve dans [LAM07].

4.4.3 Résultat de simulation :

4.4.3.1 Suivi de la trajectoire de référence

La commande par placement de pôles type proportionnelle-dérivée est appliquée au robot type compas décrit au § 2.6.1. la trajectoire de référence à stabiliser est celle qui correspond au cycle limite passif caractérisé par le vecteur initial :

$$x_{init} = \begin{bmatrix} -0.3234 & 0.2187 & -0.3772 & -1.0918 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

On fixe les gains de commande :

$$k_d = 10 \quad \text{et} \quad k_p = 5$$

Ce qui donne le vecteur des valeurs propres de la matrice \tilde{A} suivant :

$$\begin{bmatrix} -2.5000 + 1.9365j \\ -2.5000 - 1.9365j \\ -2.5000 + 1.9365j \\ -2.5000 - 1.9365j \end{bmatrix}$$

Si on pose $x(0) = x_{init}$, autrement dit $e(0) = 0$, le suivi de la trajectoire est parfait, les courbes des positions articulaires (figure 4.3) et des vitesses articulaires (figure 4.4) de la trajectoire réelle et celles de la trajectoire désirée sont pratiquement confondues. Le vecteur de l'erreur de suivi est pratiquement nul durant toute la durée de la marche. Les allures des erreurs de suivi sur les positions et les vitesses articulaire sont données respectivement par les figures 4.5 et 4.6. Les couples de la commande proportionnelle-dérivée sont données par figure 4.7.

4.4.3.2 Analyse de la stabilité

Le cycle limite passif est caractérisé par une période de pas égale à :

$$T_{pas} = 0.734722s$$

Après le calcul numérique de la matrice :

$$C = Dh_d e^{\tilde{A}T_{pas}}$$

On trouve que ses valeurs propres sont données par le vecteur suivant :

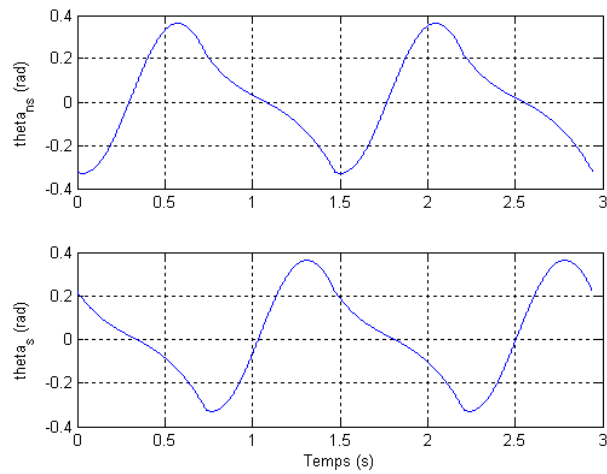


Figure 4.3: Les positions articulaires de la trajectoire réelle et celles de la trajectoire désirée ($x(0) = x_{init}$)

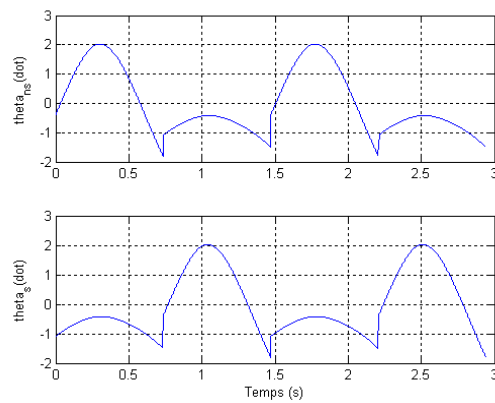


Figure 4.4: Les vitesses articulaires de la trajectoire réelle et celles de la trajectoire désirée ($x(0) = x_{init}$)

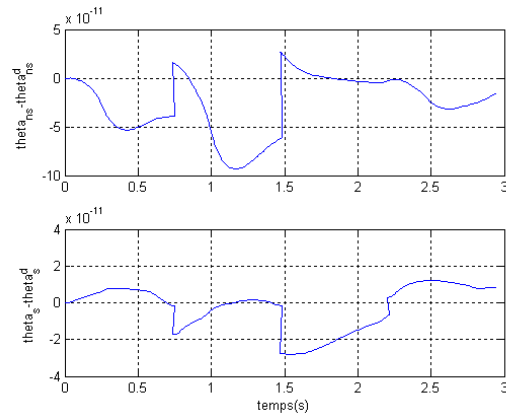


Figure 4.5: L'évolution temporelle de l'erreur de suivi sur les positions articulaires $x(0) = x_{init}$

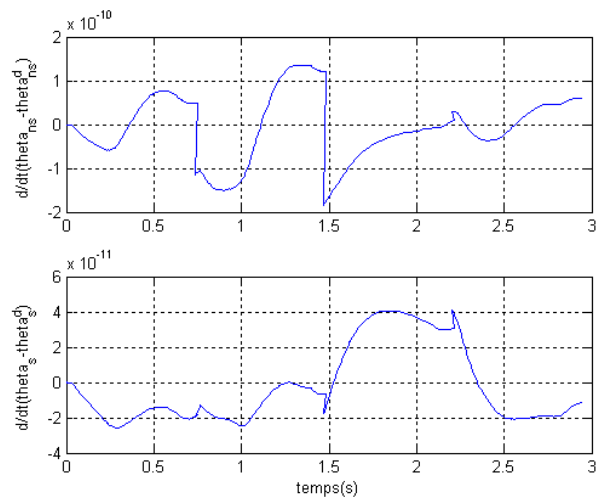


Figure 4.6: L'évolution temporelle de l'erreur de suivi sur les vitesses articulaires $x(0) = x_{init}$

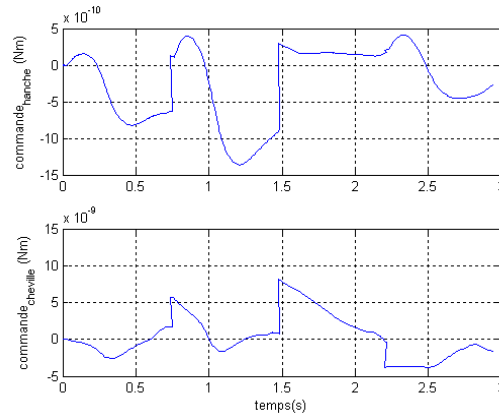


Figure 4.7: Les couples de la commande Proportionnelle-dérivée pour $x(0) = x_{init}$

$$\begin{bmatrix} 0.1714 \\ 0.0480 \\ -0.1168 \\ -0.0667 \end{bmatrix}$$

Tous les éléments de ce vecteur sont de modules contenu dans le cercle unité. Ce qui prouve la stabilité orbitale du cycle limite de référence.

4.4.3.3 Robustesse face aux variations du vecteur initial

A présent, on établit par simulation à une analyse de la roustesse de la commande proportionnelle-dérivée face à des perturbation du vecteur d'état initiale, En effet, on introduit à chaque composante du vecteur carctérisant le cycle limite de référence, un facteur additif noté *dev* et qui représente la déviation de $x(0)$ par rapport à x_{init} . Ainsi $x(0)$ s'écrit de la forme suivante

$$x(0) = \begin{bmatrix} -0.3234 + dev & 0.2187 + dev & -0.3772 + dev & -1.0918 + dev \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Le vecteur initial appartient au bassin d'attraction Si la marche du robot type compas est initialisée par un vecteur d'état qui se trouve dans le bassin d'attraction du cycle limite passif , la trajectoire de marche avec un couple de commande nulle converge vers le cycle limite après un certain nombre de pas (figure 4.8)

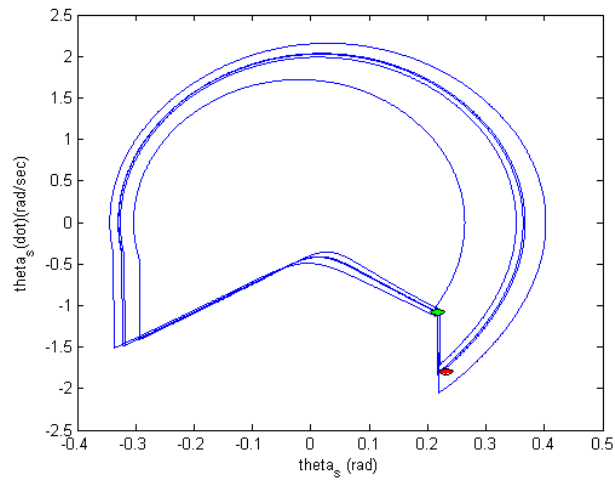


Figure 4.8: La trajectoire passive du robot dans le plan de phase avec $x(0)$ appartient a bassin d'attraction ($dev = 0.01$)

Alors qu'avec la commande par placement de pôles, la trajectoire converge plus rapidement vers le cycle limite de référence (figure 4.9). Les couples aux niveaux de la hanche et de la cheville sont donnés par la figure 4.10. Les allures des erreurs de suivi sur les positions et les vitesses articulaire respectives sont donnée par les figures 4.11 et 4.12 respectives.

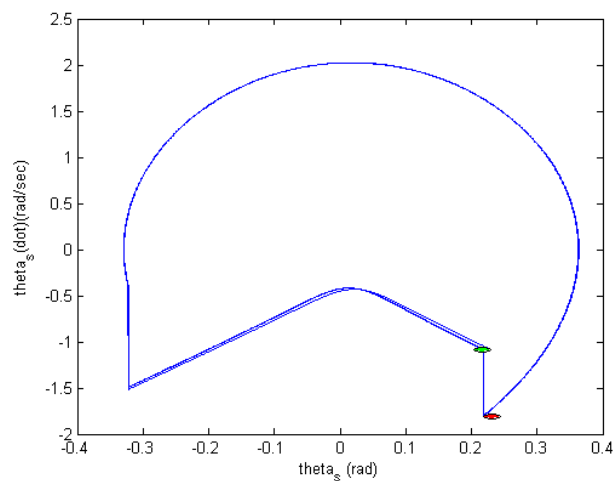


Figure 4.9: La trajectoire du robot soumis à une commande proportionnelle-dérivée, dans le plan de phase avec $x(0)$ appartient au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.01$)

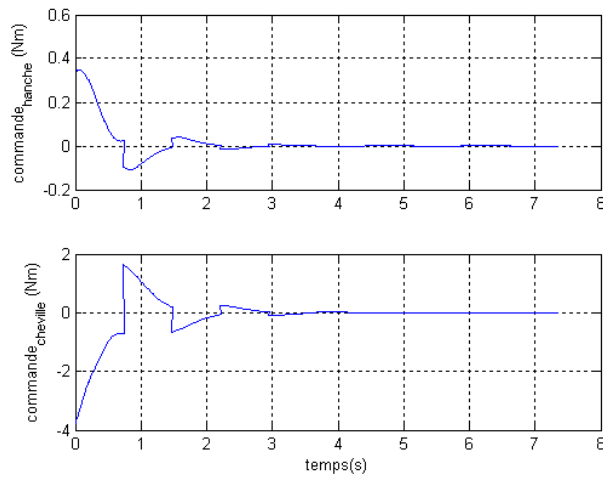


Figure 4.10: Les couples de commande proportionnelle-dérivée avec $x(0)$ appartient au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.01$)

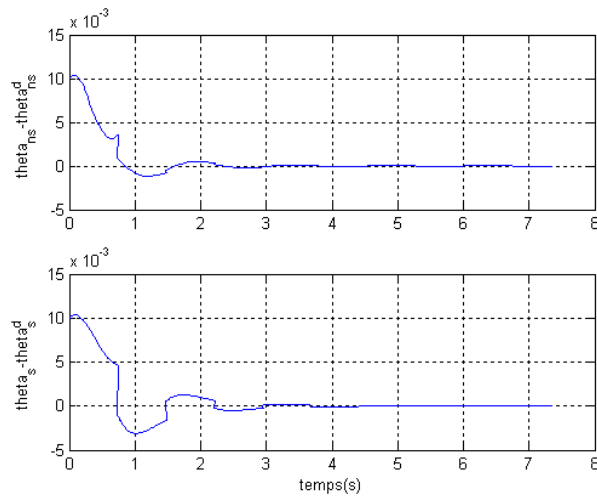


Figure 4.11: L'évolution de l'erreur de position avec $x(0)$ appartient au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.01$)

Le vecteur initial appartient est en dehors du bassin d'attraction : Initialisée par un vecteur d'état qui n'appartient pas au bassin d'attraction du cycle limite de référence, le robot non soumis à la commande stabilisante proportionnelle-dérivée ne peut jamais atteindre la mouvement de marche cyclique et il finit par tomber. Dans la figure 4.13, on peut voir que sa trajectoire diverge et s'éloigne très vite de l'orbite périodique.

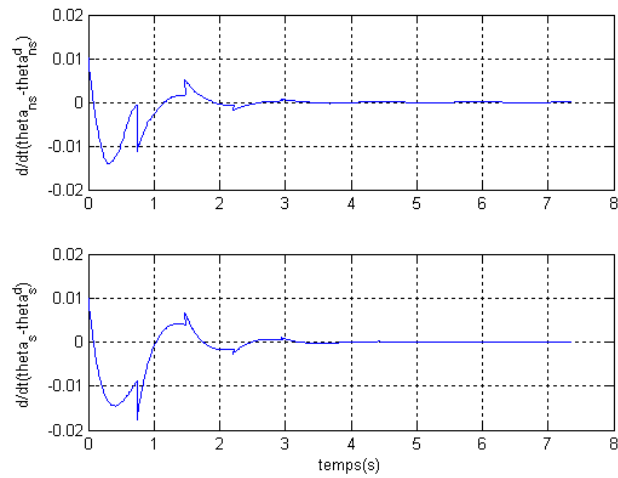


Figure 4.12: L'évolution temporelle de l'erreur de vitesse avec $x(0)$ appartient au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.01$)

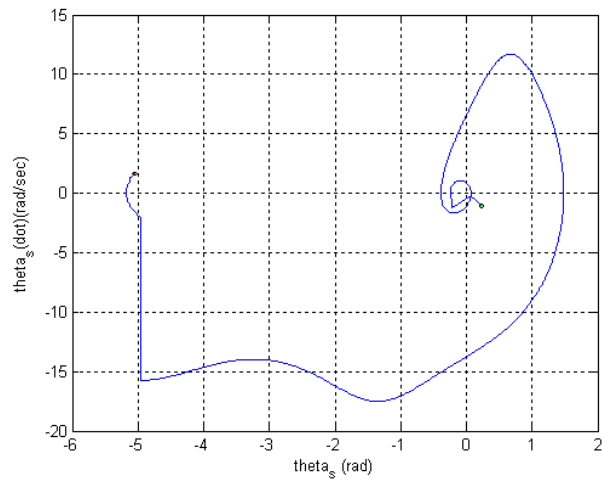


Figure 4.13: La trajectoire passive du robot dans le plan de phase avec $x(0)$ n'appartient pas au bassin d'attraction ($dev = 0.035$)

Cependant, si on applique au robot la commande par placement de pôles, ce dernier converge vers le mouvement périodique. Après quelque pas, sa trajectoire atteint le cycle limite de référence (figure 4.14), et l'erreur de suivi tend vers 0 (figures 4.15 et 4.16). La figure 4.17 donne les couples de commande nécessaires.

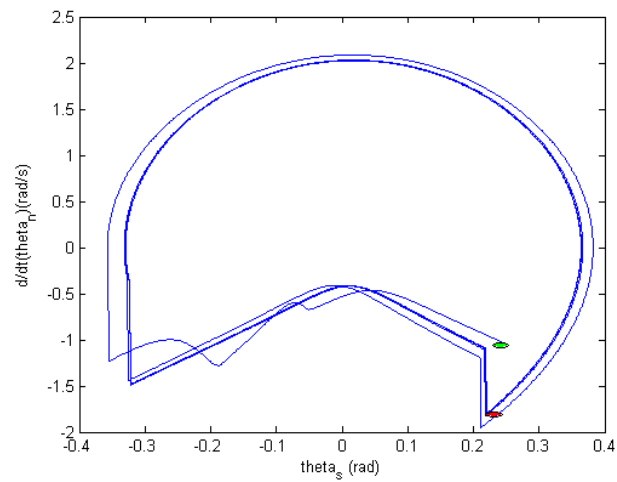


Figure 4.14: La trajectoire du robot soumis à une commande proportionnelle-dérivée, dans le plan de phase avec $x(0)$ n'appartient pas au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.035$)

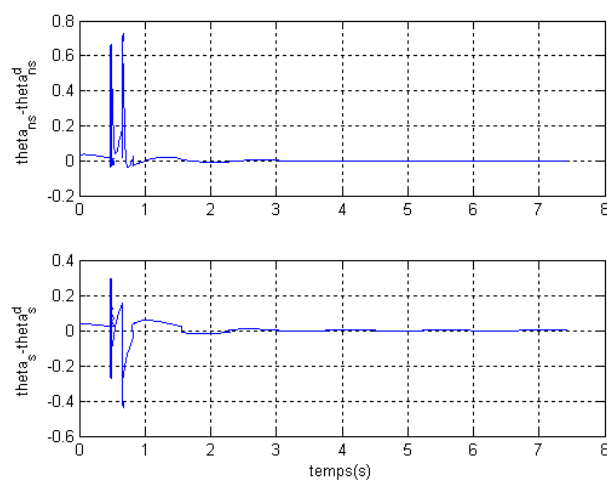


Figure 4.15: L'évolution de l'erreur de position avec $x(0)$ n'appartient pas au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.035$)

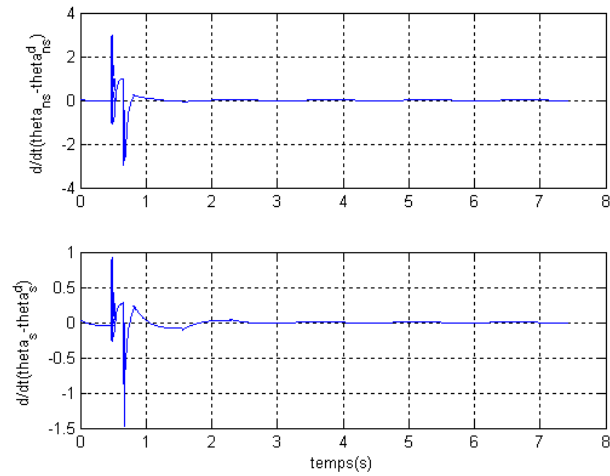


Figure 4.16: L'évolution de l'erreur de vitesse avec $x(0)$ n'appartient pas au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.035$)

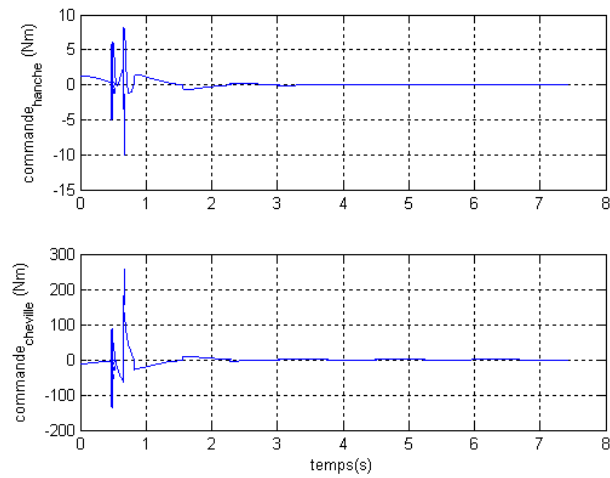


Figure 4.17: Les couples de commande proportionnelle-dérivée avec $x(0)$ n'appartient pas au bassin d'attraction du cycle limite de référence ($dev = 0.035$)

Conclusion La commande par placement de pôles est robuste par rapport aux variations du vecteur d'état initial. Elle permet non seulement d'augmenter la vitesse de convergence au cycle limite de référence, mais aussi d'élargir son bassin d'attraction.

4.5 Réalisation en ligne d'une allure de marche périodiques

Le fait de suivre une trajectoire pré-calculée est très contraignant pour le robot bipède. En effet, pour pouvoir s'adapter aux exigences de son environnement (caractéristiques désirées de la marche, nature et géométrie du sol ...), le robot doit disposer d'une grande variété de trajectoires générées hors ligne; chacune associée à une allure de marche donnée. Ce qui n'est pas toujours évident du fait de la limitation de l'espace mémoire. En plus, cette technique limite l'autonomie du robot puisque ce dernier est impuissant face aux événements imprévisibles qui peuvent survenir pendant la marche (par exemple la rencontre de nouveaux obstacles,..).

En adoptant une méthodologie proche de celle de [KH03a] et [KH03b], dans ce paragraphe, on développe un algorithme de commande qui ne nécessite pas l'utilisation de trajectoires pré-calculées. En fait, les tâches de génération de trajectoire et de commande sont élaborées simultanément et seuls quelques facteurs caractéristiques (La longueur et la période de pas) de l'allure de marche désirée seront introduits à l'entrée de l'algorithme. En effet, pour chaque allure de marche, on calculera, par le biais du modèle cinématique inverse, la valeur finale avant l'impact du vecteur d'état. Puis une loi de commande à énergie minimale sera conçue pour forcer les coordonnées articulaires à atteindre leurs valeurs finales au même instant. En outre, on introduit dans notre algorithme la résolution d'un problème linéaire quadratique de minimisation de temps qui permet à la commande d'atteindre l'objectif en un temps minimum pour des allures de marche plus rapides. Ainsi, on commence par une définition d'une trajectoire de robot type-compas en termes des facteurs caractéristiques de la marche, ensuite l'algorithme de commande sera expliqué et présenté sous forme de schémas synoptiques. Puis on abordera la question de la stabilité en utilisant la même technique utilisée pour la commande de suivi de la trajectoire. Enfin, l'approche de commande sera appliquée au modèle simulé du robot type-compas afin de prouver sa validité.

4.5.1 Définition d'une allure de marche

On caractérise une allure de marche désirée par la longueur de pas L_{pas} et la période du pas T_{pas} .

Dans la figure 4.18, on voit bien que l'abscisse du pied juste après le contact du pied de balancement avec le support de marche. ($t = T_{pas}$) est égale à L_{pas} . Alors son ordonnée est nul. Ainsi, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} xp(T_{pas}) &= L_{pas} \\ yp(T_{pas}) &= 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, le modèle cinématique du robot type-compas est donné par :

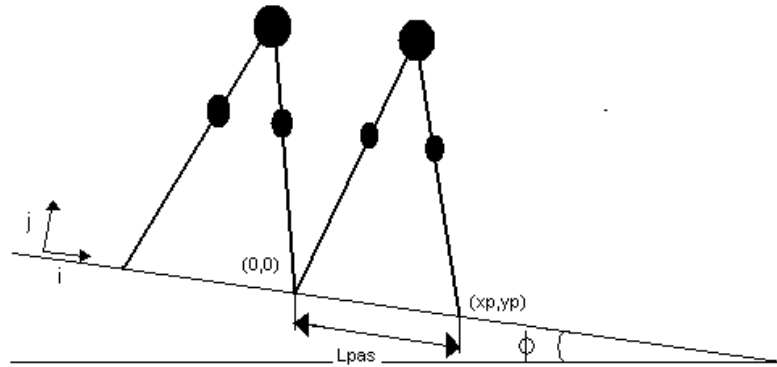


Figure 4.18: Définition d'une allure du robot type-compas en termes de facteurs caractéristiques de la marche

$$x_p = l(\sin(\theta_{ns} + \phi) - \sin(\theta_s + \phi)) \quad (4.26)$$

$$y_p = l(-\cos(\theta_{ns} + \phi) + \cos(\theta_s + \phi))$$

Par conséquent, on utilise le modèle cinématique inverse à $t = T_{pas}$ (résolution d'un système à deux inconnues) pour calculer la valeur finale désirée du vecteur des coordonnées généralisées du robot noté :

$$q_f^d = \begin{bmatrix} \theta_{ns} \\ \theta_s \end{bmatrix}_f$$

le vecteur des vitesses généralisées désiré final \dot{q}_f^d peut être obtenu par dérivation du système (4.26), on aura l'équation suivante :

$$\dot{q}_f^d = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{ns} \\ \dot{\theta}_s \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \end{bmatrix}$$

avec

$$J = \begin{bmatrix} l\cos(\theta_{ns} + \phi) & -l\cos(\theta_s + \phi) \\ l\sin(\theta_{ns} + \phi) & -l\sin(\theta_s + \phi) \end{bmatrix}$$

4.5.2 Approche de commande

4.5.2.1 Commande à énergie minimale

Considérons le système linéaire (4.27) qui régit la dynamique du simple support :

$$\dot{x} = Ax + Bv \quad (4.27)$$

on a :

$$\text{rang} \left(\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix} \right) = 4$$

Alors, le robot compas est commandable pendant la phase de simple support.

Supposons que le robot se trouve dans un état initial quelconque $x_0 = x_{init}$ à un instant $t_0 = 0$. la commande à énergie minimale permet de conduire le vecteur d'état du robot à sa valeur finale désirée $x_f = \begin{bmatrix} q_f^d \\ \dot{q}_f^d \end{bmatrix}$ en un temps fini T_{pas} tout en minimisant les dépenses énergétiques ([Che98]). Durant la phase de simple support la commande du système linéaire (4.27) a pour expression:

$$v_{E^*}(t) = B^T e^{A^T(t_0-t)} W_{t_0, t_0+T_{pas}}^{-1} (e^{-AT_{pas}} x_f - x_0); \quad t \in [t_0, t_0 + T_{pas}] \quad (4.28)$$

avec $W_{t_0, t_0+T_{pas}}$ est la matrice constante inversible définie positive appelée le Grammian de commandabilité et définie par :

$$W_{t_0, t_0+T_{pas}} = \int_{t_0}^{t_0+T_{pas}} e^{A(t_0-t)} B B^T e^{A^T(t_0-t)} dt$$

Au début de la marche, $t_0 = 0$ et $x_0 = x_{init}$. Alors qu'au cours de la marche, les valeurs respectives de t_0 et de x_0 sont reinitialisées après chaque impact par l'instant d'avènement du nouveau impact, et l'état du robot juste après l'impact respectivement.

Ainsi, pour un intervalle de temps $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ avec τ_k et τ_{k+1} sont respectivement les instants de deux impacts successifs, avec $\tau_{k+1} - \tau_k = T_{pas}$, la forme générale de (4.28) est la suivante :

$$v_{E^*}(t) = B^T e^{A^T(\tau_k-t)} W_{\tau_k, \tau_{k+1}}^{-1} (e^{-AT_{pas}} x_f - x(\tau_k^+)); \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}] \quad (4.29)$$

avec

$$W_{\tau_k, \tau_{k+1}} = \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} e^{A(\tau_k-s)} B B^T e^{A^T(\tau_k-s)} ds \quad (4.30)$$

La commande ainsi conçue permet de produire une allure périodique puisqu'elle force le vecteur d'état du système à atteindre une valeur désirée après chaque impact. Le schéma synoptique de l'approche proposée est présentée dans la figure 4.19

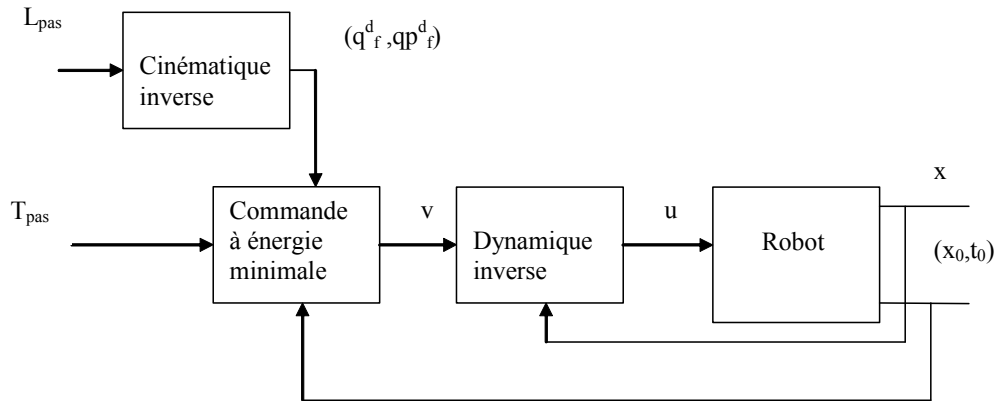


Figure 4.19: Approche de commande à énergie minimale pour la génération d'allures de marche périodiques

Remarque 4.1:

La commande (4.28) est une fonction continue qui dépend explicitement du temps. Elle permet le transfert de l'état d'un système linéaire commandable d'un point initial $x(t_0) = x_0$ vers un point final $x(t_1) = x_1$. En plus elle consomme le minimum d'énergie par rapport aux autres commandes qui peuvent faire le même transfert. Ce résultat peut être mis en évidence en utilisant un critère quadratique simple traduisant l'énergie totale du système et donné par l'expression suivante :

$$\int_{t_0}^{t_1} \|u(t)\|^2 dt$$

la démonstration détaillée se trouve dans [Che98], annexe C.

4.5.2.2 Commande linéaire quadratique en temps minimum

Toujours avec un souci d'optimalité, il serait judicieux de choisir la période de pas minimale T_{\min} pour une longueur de pas donnée L_{pas} . Cette action est très utile pour le déplacement d'un robot bipède. En effet, la minimisation du temps de parcours est souvent nécessaire alors que la longueur de pas est contrainte par l'environnement de la marche (obstacles, fossés..etc). Nous allons exploiter pour cela la technique (LQMT) qui consiste à minimiser le temps nécessaire pour conduire le système d'un état x_0 à un état x_1 en utilisant un critère linéaire quadratique ([VL91] et [EOZ98]).

Cas général :

Introduction : On considère le système linéaire invariant suivant :

$$\dot{x} = Ax + bu, \text{ avec } x_0 \text{ donné} \quad (4.31)$$

tels que $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$. Il est bien connu que le problème de la commande à temps minimum qui consiste à chercher la loi de commande $u(t)$ qui minimise l'indice de performance :

$$J = \int_0^T 1 dt, \quad \text{avec } T \text{ libre}$$

est mal posé puisque la solution est de prendre $u(t)$ infinie. Pour remédier à cet handicap, est d'imposer des limitations sur l'amplitude de $u(t)$. Ce qui résulte sur la loi de commande classique communément connue sous le nom de Bang-Bang.

Généralement, la solution type Bang-Bang place la commande optimale dans les limites d'un polygone. En fait le problème à temps minimum n'as pas de solution si les contraintes sur l'amplitude de la commande sont strictement des inégalités de la forme $|u(t)| < u_{\max}$. Le mouvement de basculement rapide qui se produit lorsque la commande change d'un coté du polygone à un autre est non désiré pour de nombreuses applications. C'est pourquoi, la commande Bang-Bang est souvent inapplicable.

Dans ([VL91]), Verriest et Lewis ont présenté une nouvelle approche pour la détermination de la commande en temps minimum qui se base sur l'optimisation d'un indice de performance linéaire quadratique donné par l'expression suivante :

$$J = x^T(T)S_T x(T) + \int_0^T (\rho + x^T Q x + u^T R u) dt$$

avec $S_T \geq 0$, $Q \geq 0$, $R > 0$ et $\rho > 0$ et T est libre. on prend S_T , Q , R et ρ constantes.

Dans le cas ou les conditions finales du système sont libres le problème de trouver la valeur minimale de T peut être résolu simplement en utilisant l'état initial x_0 et la dérivée de la solution d'une équation de Riccati. La même technique peut être appliquée dans le cas ou les conditions finales sont fixées avec $x_0 = 0$.

Notons que l'approche LQMT a été étendu au cas des systèmes discrets par El Alami et al.([EOZ98]).

Dans la suite, on va présenté le résultat principal de cette approche dans le cas des conditions finales fixées.

Résultat principal : On considère la fonction coût suivante :

$$J = \rho T + \int_0^T u^T R u dt \quad (4.32)$$

L'objectif est de trouver la commande en boucle ouverte qui minimise (4.32) et qui conduit le système linéaire (4.31) de $x(0) = x_0$ à un état final donné $x(T) = x_f$. La solution de ce problème est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.1:

On suppose que la paire (A, B) est commandable et la matrice R est non singulière. Alors la solution du problème linéaire quadratique de minimisation du temps (LQMT), avec des conditions finales fixées, existe. Le temps T^* optimal est soit zéro soit il satisfait à l'équation suivante

$$\frac{d}{dT} (d_T^T G_T^{-1} d_T) = -\rho$$

qui est équivalente à l'expression :

$$x_f^T A^T S d_T + d_T^T S B R^{-1} B^T S d_T + d_T^T S A x_f = \rho$$

avec

$$d_T = x^d - e^{AT} x_0$$

le système (4.12) est commandable pour tout état initial x_0 du robot bipède. Si on fixe un état final désirée x_d (qui dépend de la longueur de pas désirée), alors il existe un temps minimal pour aller de x_0 à x_d qui est la solution de l'équation suivante :

$$\frac{d}{dT} (d_T W_{0,T} d_T^T) = -\rho$$

avec

$$d_T = x^d - e^{AT} x_0$$

et

$$S(t) = G_t^{-1}$$

G_T étant le Grammian de commandabilité dont l'expression est

$$G_T = \int_0^T e^{At} B R^{-1} B^T e^{A^T t} ds$$

En plus, la commande optimale qui minimise le critère (4.32) est donnée par :

$$u^*(t) = R^{-1} B^T e^{A^T(T-t)} G_T^{-1} d_T, \quad 0 \leq t \leq T \quad (4.33)$$

La démonstration de ce théorème se trouve dans ([VL91]).

Remarque 4.2

Pour un T fixe, La commande (4.33) minimise le deuxième terme du critère (4.32) qui reflète l'énergie du système :

$$J_T = \int_0^T u^T R u dt$$

On note par J_T^* le cout minimal obtenu par $u(t) = u^*(t)$. Un simple calcul permet d'obtenir l'expression de J_T^* :

$$J_T^* = d_T^T G_T^{-1} d_T$$

Par conséquent, le coût total exprimé par :

$$J(T, \rho) = \rho T + J_T^*$$

est minimal par rapport à celui des autres commandes qui réalise un transfert d'état entre x_0 et x_1 en un temps T . Le paramètre additionnel ρ constitue une pondération relative entre la commande minimisant l'énergie et le temps écoulé. Le temps de transit est obtenu par minimisation sur $T \geq 0$ de l'ensemble $J(T, \rho)$ paramétrisé par ρ .

Par conséquent, un choix judicieux de ρ s'impose. Si on considère par exemple le robot type-compas, La figure 4.20 donne l'allure de la période de pas minimal en fonction de la longueur de pas pour différentes valeur du paramètre ρ . On remarque que les grandes valeurs de ρ permettent d'obtenir des valeurs petites de la période de pas optimale. Ce qui contribue à la rapidité des allures de marche

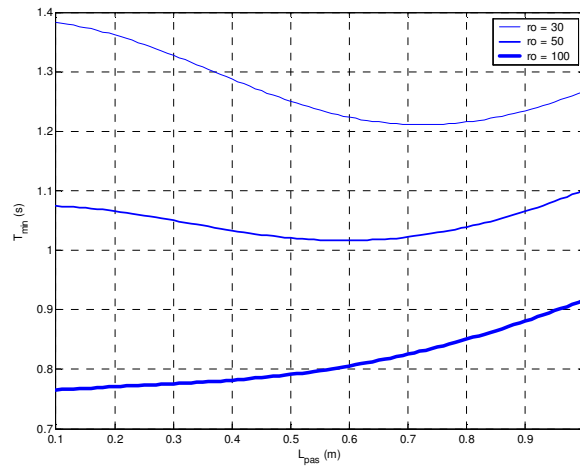


Figure 4.20: Le robot type compas : la période de pas minimal en fonction de la longueur de pas pour différente valeur de ρ

Par ailleurs, on remarque d'après la figure 4.21 que plus ρ est grande plus le coût est grand. D'où des couples de commande importants.

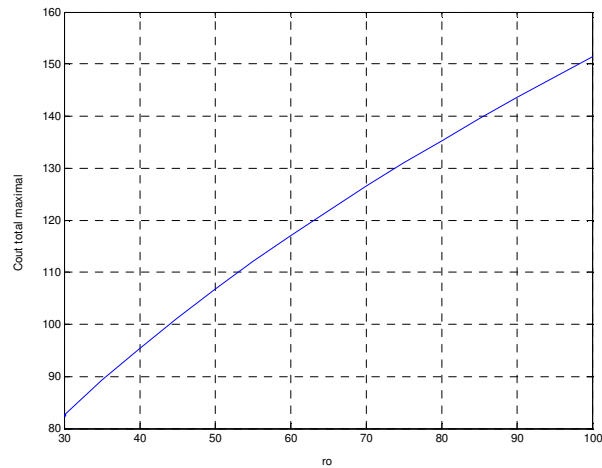


Figure 4.21: Le robot type-compas : la valeur du coût total J de la commande en fonction du paramètre ρ

Les autres résultats de simulation concernant l'application de l'approche sur le robot type compas seront présentés dans le paragraphe 4.5.3.1

Application au robot type-compas Avec une longueur de pas L_{pas} et une configuration initiale x_0 données, L'application de l'approche LQMT sur le robot type-compas, nous permet de calculer la commande à énergie en temps minimum. Par ailleurs, on remarque que cette commande(4.33) et la commande à énergie minimale (4.28) présentent des similitudes. C'est prévisible puisque les deux commande minimisent le même type de critère sauf que pour v_{E^*} (4.28), la matrice de pondération R est égale à la matrice Identité (Remarque 4.1). En plus, si on examine de plus près les expressions des deux commandes à $t_0 = 0$, on peut voir qu'elles sont identiques , En fait il suffit de remarquer que :

$$W_{0,T} = e^{A^T T} G_T^{-1} e^{AT}$$

Ainsi, la nouvelle commande à appliquer au robot est donnée par :

$$v_{E^*T^*}(t) = B^T e^{A^T(\tau_k - t)} W_{\tau_k, \tau_{k+1}}^{-1} (e^{-AT^*} x_f - x(\tau_k^+)); \quad t \in [\tau_k, \tau_{k+1}] \quad (4.34)$$

En effet, la période de pas minimale $T^* = T_{\min}$ obtenue avec cette technique sera introduite dans l'algorithme de commande (figure 4.19) pour permettre au robot type-compas de réaliser des allures de marche optimales en temps et en énergie minimales.

Le nouveau schéma de commande est donné par la figure 4.22

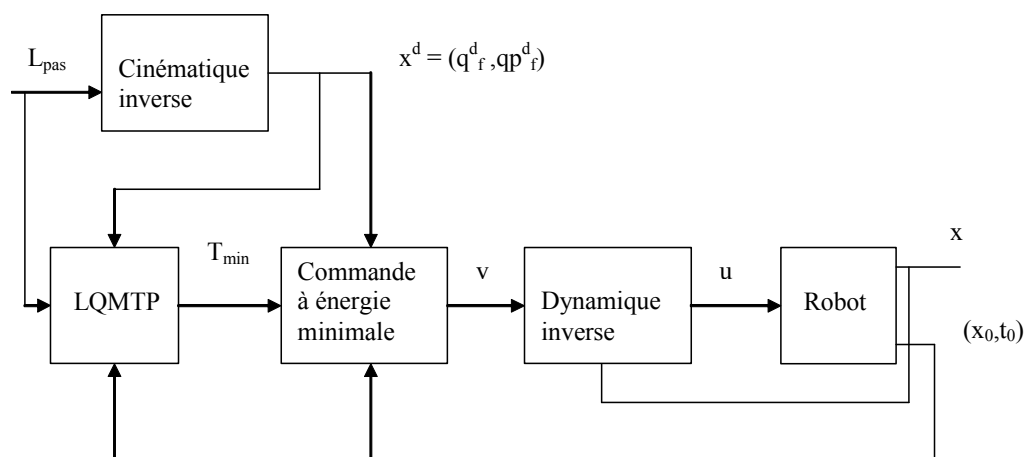


Figure 4.22: Approche de Commande à énergie minimale en un minimum de temps pour la génération d'allures de marche périodiques d'un robot type-compas

4.5.3 Analyse de la stabilité

Afin d'analyser la stabilité orbitale des allures périodiques de marche réalisées par le schéma de commande de la figure 4.22, on utilise le même principe que celui utilisé au paragraphe 4.4.2.

Rappelons que l'approche de commande à énergie minimale et en temps minimum décrite plus haut est appliquée au modèle linéarisé du robot type compas pendant la phase de simple support. Par conséquent, la dynamique du robot en boucle fermée est donné par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bv_{E^*T^*} \quad (4.35)$$

$v_{E^*T^*}$ est donnée par (4.34). Le modèle hybride du robot type-compas est donné par le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bv_{E^*T^*}(t); & \text{pour } t \neq \tau_k \\ x(\tau_k^+) = h(x(\tau_k^-)) & \text{pour } t = \tau_k \end{cases} \quad (4.36)$$

Soit $x(t)$, $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$ une trajectoire solution des équation dynamiques hybrides 4.36 avec $x(t_0) = x_0$.

Or, sur un intervalle $[\tau_k^+, \tau_{k+1}^-]$, la trajectoire de $x(t)$ est régie par l'équation linéaire (4.35). Alors l'expression explicite du flux $\phi_x(t)$ est donnée par :

$$\phi_x(t; \tau_k^+, x(\tau_k^+), \tilde{v}_{E^*T^*}) = e^{A(t-\tau_k)}x(\tau_k^+) + \int_{\tau_k}^t e^{A(t-s)}Bv_{E^*T^*}(s)ds, \quad \forall t \in [\tau_k^+, \tau_{k+1}^-] \quad (4.37)$$

Soit $x(\tau_{k+1}^-)$ et $x(\tau_k^-)$ la valeurs respectives de $x(t)$ aux instants juste avant les impact k et $k+1$ respectivement. On a d'après (4.37) :

$$x(\tau_{k+1}^-) = \phi_x(\tau_{k+1}^-; \tau_k^+, x(\tau_k^+), \tilde{v}_{E^*T^*}) \quad (4.38)$$

A l'instant d'impact τ_k , $x(t)$ obeît à l'équation algébrique :

$$x(\tau_k^+) = h(x(\tau_k^-))$$

D'où :

$$x(\tau_{k+1}^-) = \phi_x(\tau_{k+1}^-; \tau_k^+, h(x(\tau_k^-)), v_{E^*T^*}) \quad (4.39)$$

Ainsi, on peut définir la variable discrete $x(k) = x(\tau_k^-)$.qui sera régie par l'équation algébrique non linéaire suivante :

$$\begin{aligned}
x(k+1) &= \phi_x(\tau_{k+1}^-; \tau_k^+, h(z(k)), v_{E^*T^*}) \\
&= e^{AT^*} h(x(k)) + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}^-} e^{A(\tau_{k+1}^- - s)} B v_{E^*T^*}(s) ds
\end{aligned}$$

En remplaçant $\tilde{v}_{E \min}$ par son expression (??), on obtient :

$$x(k+1) = e^{AT^*} \left(h(x(k)) + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}^-} e^{A(\tau_{k+1}^- - s)} B B^T e^{A^T(\tau_k - s)} W_{\tau_k, \tau_{k+1}}^{-1} (e^{-AT^*} x_f - x(\tau_k^+)) ds \right)$$

En plus d'après la définition du Grammian (4.30), on a :

$$x(k+1) = x_f \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Le problème de l'analyse de la stabilité du point fixe $x(k) = x_f$ est trivial. Par conséquent le cycle limite obtenue par cette approche et qui passe par x_f , est stable par définition.

Remarque 4.3 :

- Cette propriété est déjà connu pour les systèmes linéaires ([Che98]). Dans ce paragraphe, nous l'avons démontré pour le robot bipède type-compas qui est un système hybride.
- Un résultat direct de cette propriété est que le cycle limite de marche obtenu par cette approche n'est pas sensible aux conditions initiales du robot. Ce qui implique un bassin d'attraction important contraint seulement par les limites des couples de la commande.

4.5.3.1 Résultats de simulation

L'approche de commande à énergie minimale et en temps minimum à été appliquée avec succès au modèle simulé du robot type compas (§ 2.6.1). Dans ce paragraphe, on présente les différentes courbes obtenues lors de la simulation.

Si on fixe la longueur de pas de marche, avec la résolution du problème LQMT (§4.5.2.2), on obtient la période de pas minimale qui minimise le critère quadratique (4.32). On choisit $L_{pas} = 0.6m$. Si on fixe $\rho = 100$, la période optimale correspondante est $T_{\min} = 0.805m/s$ d'où une vitesse d'avancement $v = 0.7453m/s$. Le robot est initialisé par le vecteur d'état :

$$x_0 = \begin{bmatrix} -0.2234 & 0.4187 & -0.2772 & -0.9918 \end{bmatrix}^T \quad (4.40)$$

La figure 4.23 montre que la trajectoire du robot type compas dans le plan de phase. On voit bien qu'elle converge rapidement vers un cycle limite. Les courbes respectives des positions

et des vitesses articulaires correspondantes à cette allure de marche sont présentées dans les figures 4.24 et 4.25 respectivement. Alors que les couples de commande appliqués au niveau de la hanche et de la cheville du robot sont donnés par la figure 4.26.

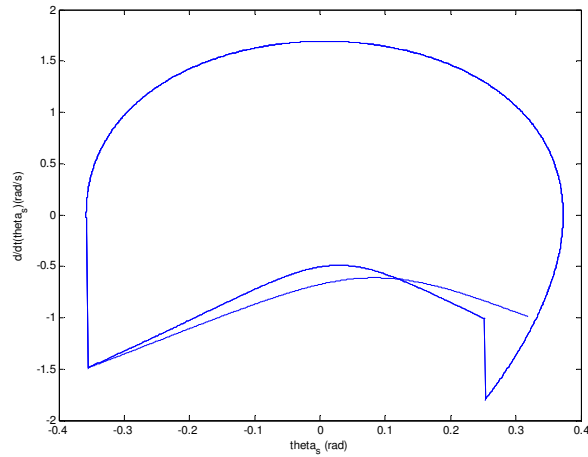


Figure 4.23: Cycle limite du robot type compas réalisé par l'approche de commande à énergie minimale en un temps minimum ($L_{pas} = 0.6m$ et $T_{min} = 0.805m/s$)

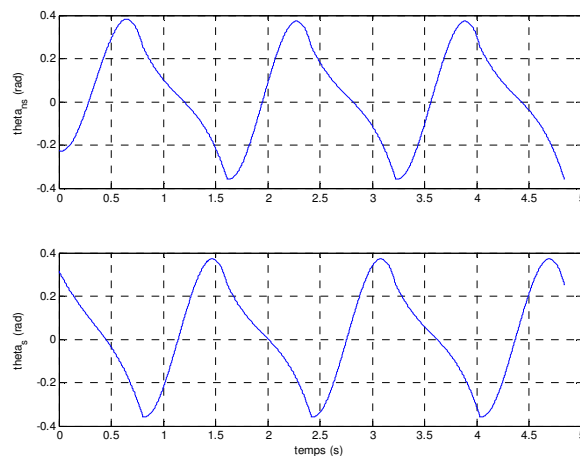


Figure 4.24: Les positions articulaires de l'allure de marche réalisée par l'approche de commande à énergie minimale en un temps minimum ($L_{pas} = 0.6m$ et $T_{min} = 0.805m/s$)

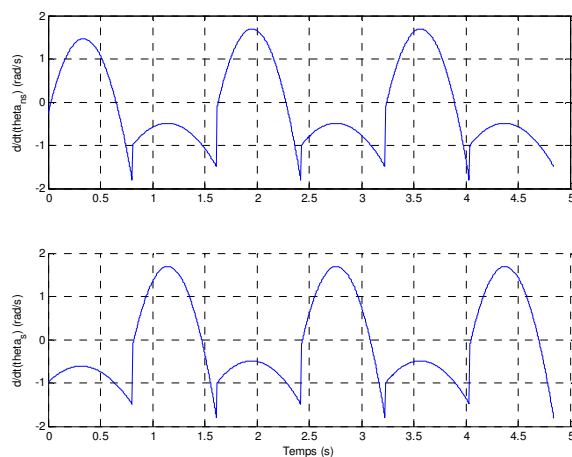


Figure 4.25: Les vitesses articulaires de l'allure de marche réalisée par l'approche de commande à énergie minimale en un temps minimum ($L_{pas} = 0.6m$ et $T_{min} = 0.805m/s$)

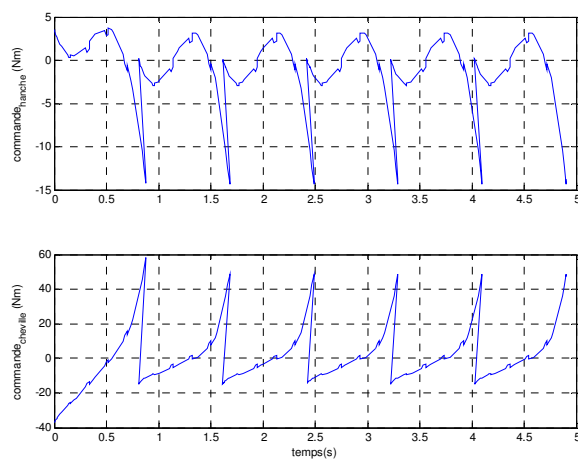


Figure 4.26: Les couples de commande à énergie minimale en un temps minimum pour une allure de marche caractérisée par $L_{pas} = 0.6m$ et $T_{min} = 0.805m/s$

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait recours à la linéarisation de la dynamique continue de la phase de simple support du robot compas, en utilisant la technique de la linéarisation exacte. Cette dernière présente l'avantage de pouvoir annuler complètement l'effet des non linéarités et d'obtenir un système globalement linéarisé. Ce qui nous a permis de profiter des techniques de

commande propres aux systèmes linéaires.

D'une part, nous avons appliqué une commande par placement de pôles qui utilise une commande classique proportionnelle dérivée pour assurer le suivi de trajectoire de marche précalculées qui correspondent aux cycles limites passifs ou semi-passifs. Bienqu'elle soit simple dans son principe, cette commande permet de stabiliser différentes allures de marche du robot correspondant à une variété de pentes et de vitesses d'avancement et d'améliorer aussi la robustesse de ces cycles face aux variations des conditions initiales du robot bipède. Ce résultat a été prouvé par simulation.

D'autre part, en se basant sur la linéarisation exacte, nous avons pu développer une approche de commande qui utilise une commande à énergie minimale en un minimum de temps qui réalise une marche cyclique du robot compas, et qui permet de choisir les caractéristiques de l'allure souhaité en ligne sans faire recours aux trajectoires précalculés.

Cependant, la commande basée sur la linéarisation exacte présente un inconvénient majeur. En effet, vu qu'elle assure la suppression exacte des nonlinéarités, elle requiert une description exacte des fonctions non linéaires. Ce qui n'est pas possible en pratique puisque les paramètres d'un système dynamique ne sont pas connus de façon exacte. Ainsi, l'analyse de la robustesse face aux incertitudes paramétrique s'impose pour une étude rigoureuse de l'évolution du système. Ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 5

Robustesse des allures de marche face aux incertitudes paramétriques

5.1 Introduction

Une allure de marche régulière d'un robot bipède se caractérise par un comportement périodique des articulations qui se traduit dans le plan de phase par une courbe fermée : cycle limite. La stabilité de la marche dépend de la stabilité orbitale du cycle limite. Par ailleurs, les cycles limites, qu'ils soient passifs (Chapitre 2) semi-passifs (Chapitre 3) ou contrôlés (Chapitre 4) sont déterminés pour un jeu de paramètres géométriques bien définis. En fait, ces cycles limites sont étroitement liés au modèle pour lequel ils ont été calculés. Par conséquent, le comportement du robot bipède présente une grande sensibilité aux variations de ses paramètres géométriques.

Dans [AGE96], Goswami et al. ont mené une investigation numérique pour déterminer l'effet de quelques paramètres pertinents (le rapport des masses et des longueurs ainsi que la valeur de la pente) sur les caractéristiques de la marche passive d'un robot type-compass marchant sur un sol incliné. Ils ont examiné l'existence des cycles limites naturels pour des jeux de paramètres différents. En plus ils ont mis en évidence d'éventuelles bifurcations (décrites surtout par des dédoublements de période) et comportements chaotiques des trajectoires obtenues.

Notre approche est différente de celle de Goswami puisque notre objectif n'est pas de localiser des cycles limites passifs, caractérisés chacun par une condition initiale différente, pour une variété de valeurs de paramètres mais d'analyser la robustesse du comportement nominal du robot type-compass face aux incertitudes paramétriques. En effet, le robot étant initialisé par un vecteur d'état fixé, on se propose de déterminer les intervalles des paramètres maximales pour lesquelles la trajectoire du robot converge vers un cycle limite stable.

Du fait de la complexité du modèle étudié (non linéaire et hybride), On a choisi d'utiliser une analyse multi-modèle par balayage paramétrique. Elle consiste à définir un ensemble de paramètres admissibles, et à étudier la stabilité du système pour chaque jeu de paramètres

appartenant à cet ensemble. Elle permet de calculer la marge de robustesse. Un système est dit robustement stable sur un intervalle de valeurs de paramètres si sa marge de robustesse est supérieur à 1.

Ainsi, après l'exposé de quelques notions générales de la théorie de la robustesse, nous présenterons une description de l'approche multimodèle, ensuite nous allons appliquer cette approche au robot type compas. Enfin, nous analysons les résultats de simulations relatifs à la marche contrôlée par la commande à énergie minimale basée sur la linéarisation exacte.

5.2 Notions de la robustesse

En Automatique, la synthèse d'une loi de commande se fait généralement sur un modèle nominal simplifié qui ne prend pas en compte toute la complexité du système. Des dynamiques sont négligées, comme celles qui se trouvent en dehors de la bande passante du système asservi, les valeurs des paramètres du modèle sont considérées égales à leurs valeurs nominales.

Du fait de ces approximations, il est généralement nécessaire de recourir à une étape de validation *a posteriori* de la loi de commande. On parle d'analyse de la robustesse ; il s'agit en effet d'analyser la robustesse du comportement du système asservi face aux perturbations externes (variation des conditions de fonctionnement, comme la température) ou internes (variation des paramètres) du système.

En général, pour les systèmes robotisés, les incertitudes affectant la dynamique peuvent être de différentes formes, on cite par exemple :

- Les incertitudes sur le modèle : Elles sont dues aux des imprécisions sur les valeurs des paramètres du système (paramètres mal identifiés ou qui varient lentement), ou résulte du fait que certains paramètres subissent des variations dont on néglige les dynamiques. En effet, on admet qu'il n'existe pas de modèle mathématique qui peut représenter parfaitement un système physique réel. Par conséquent, toute écart entre le système physique et le modèle mathématique causent des incertitudes sur le modèle.
- Les incertitudes de détection : Elles existent du fait qu'il n'existe pas des capteur parfait qui peut donner la mesure exacte d'une quantité physique.
- Les incertitudes sur la commande peuvent être observées à partir de l'objectif de la commande elle même. Elles résultent de la divergence entre la sortie désirée et la sortie réelle du système de commande.
- Les incertitudes peuvent aussi être introduites par l'environnement du système robotisé : terrain accidenté ou boueux, un air poussiéreux... etc.

L'analyse de la robustesse s'appuie généralement sur la formulation d'un modèle variant

dans le temps, variation qui peut s'exprimer en fonction d'un certain nombre de paramètres incertains. La première question concerne la stabilité. L'analyse de la robustesse en stabilité consiste à établir si le système demeure stable malgré les variations attendues des paramètres. On peut aussi souhaiter que le système maintienne certaines performances (comme la bande passante). L'analyse de la robustesse en performance cherche à établir si le système maintient les performances prévues pour les variations attendues des paramètres.

Les méthodes d'analyse diffèrent en fonction du modèle choisi. En effet, le système linéaire qui présente des incertitudes paramétriques peut être modélisées de différente façon selon la nature des paramètres incertains on distingue deux types de modélisation

- Les modèles LPV (linéaires à paramètre variant) : Elles sont utilisées pour les systèmes dont les paramètres varient dans le temps. Le vecteur des paramètres apparaît comme une entrée supplémentaire qui est mélangée aux autres signaux. Par conséquent, le système est non linéaire et la stabilité ne peut être étudiée avec les outils des systèmes linéaires. Par ailleurs, un critère de stabilité suffisant mais non nécessaire peut être formulé en se basant sur des notions de stabilité quadratique et en utilisant une matrice de Lyapunov constante ou dépendante des paramètres.
- Les représentations LFR (linéaires fractionnaires) Elles sont utilisées pour des systèmes dont les paramètres sont constants et incertains. Elles sont formées d'un bouclage entre un système linéaire à temps invariant (LTI) et une matrice de gains fonction des paramètres. Ce second type correspond aux systèmes linéaires dont les matrices d'état dépendent rationnellement des paramètres ; il s'agit donc d'une généralisation du premier type. Dans ce cas, les méthodes d'analyse des systèmes linéaires sont pertinentes. On peut s'intéresser aux pôles du système (méthode multimodèle) et à la norme H_∞ des transferts. La méthode la plus classique destinée aux modèles LFR est la μ -analyse qui consiste à déterminer la taille de la plus petite incertitude capable de déstabiliser le système en se basant sur la notion de la valeur singulière structurée.

5.3 Approche multi-modèle

L'approche multimodèle représente une alternative intéressante et un outil puissant pour l'identification, la commande ou le diagnostic des systèmes complexes. Dans ce paragraphe on présente une méthode qui exploite l'analyse multimodèle pour l'étude de la robustesse en stabilité des systèmes dynamiques face aux incertitudes paramétriques. En effet, plusieurs modèles à paramètres différents sont analysés. le but étant de chercher le plus grand ensemble des paramètres qui assure la stabilité du système.

5.3.1 multi-modèle incertain

Une manière de prendre en compte les incertitudes sur les paramètres est de considérer non plus un modèle unique mais un ensemble de modèles, le comportement du système réel étant supposé être retranscrit par l'un d'eux. Cet ensemble de modèles est appelé modèle incertain. Un modèle incertain est décrit par un modèle nominal affecté par des paramètres incertains. Les matrices d'état A , B , C et D dépendent d'un vecteur de paramètres p incertain. La valeur de p n'est pas précisément connue, mais appartient à un domaine de valeurs admissibles noté \wp . Dans le cas des systèmes LTI, le modèle d'état incertain peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = M(p) \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

La valeur de $M(p)$ pour p fixée est appelée réalisation du modèle.

A défaut de connaître à l'avance la valeur de p , on connaît souvent des bornes sur ses différentes composantes :

$$\underline{p}_k \leq p_k \leq \bar{p}_k, \quad k = 1, \dots, m \quad (5.2)$$

m étant la dimension du vecteur des paramètres incertains

5.3.2 Forme normalisée de l'incertitude

Soit p_k un paramètre incertain du système 5.1, donné par 5.2 On définit :

$$p_{k0} = \frac{\underline{p}_k + \bar{p}_k}{2}$$

et

$$w_k = \frac{\bar{p}_k - \underline{p}_k}{2}$$

p_{k0} est la valeur nominale (estimée) du paramètre incertain p_k , et w_k est le poids qu'on affecte au même paramètre, autrement dit w_k traduit la variation de p_k permise.

Dans ce cas, on a :

$$p_k \in [p_{k0} - w_k, p_{k0} + w_k]$$

Ce dernier est donné par l'expression suivante :

$$p_k = p_{k0} + \delta_k w_k$$

Tel que $\delta_k \in [-1, 1]$ est appelée l'incertitude normalisée.

On appelle le domaine de variation des paramètres l'ensemble noté φ et défini par :

$$\varphi = \bigcup_{k=1, \dots, n} [p_{k0} - w_k, p_{k0} + w_k]$$

5.3.3 Stabilité sur un sous ensemble de φ

On considère le système linéaire LTI à paramètres constants incertains 5.1, notons qu'avant de se lancer dans l'analyse de la robustesse du système, il convient de connaître son fonctionnement nominal. En effet, la stabilité nominale est une condition nécessaire pour la stabilité robuste.

La stabilité nominale du système 5.1 est vérifiée si les valeurs propres de $A(p_0)$ sont à partie réelles strictement négatives, p_0 étant le vecteur qui regroupe des valeurs nominales des paramètres incertains exprimé par :

$$p_0 = [p_{10}, p_{20}, \dots, p_{m0}]$$

Soit $\tilde{\varphi}$ un sous ensemble fini de φ . Le système 5.1 est stable sur $\tilde{\varphi}$, si les valeurs propres de $A(p)$ sont à parties réelles strictement négatives pour $p \in \tilde{\varphi}$. Il s'agit d'une condition nécessaire et non suffisante car on n'explore qu'une partie de φ . la vérification de cette condition peut être établie à partir du graphe des valeurs propres de $A(p)_{p \in \tilde{\varphi}}$ obtenu par échantillonnage de l'espace paramétrique. Dans l'exemple présenté par la figure 5.1, on observe que la partie réelle des valeurs propres de $A(p)_{p \in \tilde{\varphi}}$ demeure inférieure à -1.9 ; le système est donc robustement stable.

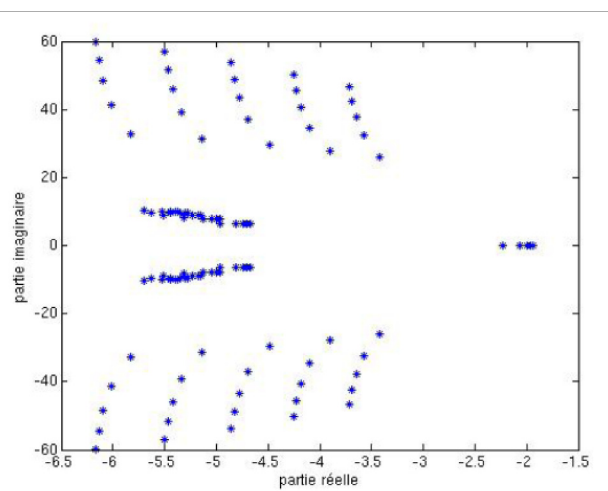


Figure 5.1: Valeurs propres de la matrice incertaine $A(p)$ pour des paramètres appartenant à un sous ensemble $\tilde{\varphi}$ du domaine de variation

5.3.4 Dilatation du domaine de variation des paramètres

soit un réel $r > 0$, On note $r\varphi$ l'ensemble de variation des paramètres défini par l'expression suivante :

$$r\varphi = \bigcup_{k=1, \dots, n} [p_{k0} - rw_k, p_{k0} + rw_k]$$

r est appelé une *dilatation* du domaine de variations des paramètres $r\varphi$.

soit ϕ une fonction réelle qui associe à chaque valeur de r la valeur maximale des parties réels de toutes les valeurs propres de la matrice $A(p)$ calculée pour différentes valeurs de p prises dans le domaine de variation $r\varphi$. On écrit :

$$\begin{cases} \phi(r) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ r \mapsto \phi(r) = \max_{i=1, \dots, n_A} \text{Ré}(\lambda_i(A(p))) \end{cases} \quad (5.3)$$

5.3.5 La marge de robustesse

On appelle la *marge de robustesse en stabilité* noté r^* la dilatation minimale qu'il faut appliquer au domaines de variation des paramètres pour amener le système en limite de la stabilité. Elle est définie par :

$$r^* = \min \arg(\phi(r) = 0) \quad (5.4)$$

L'expression 5.4 traduit le fait que r^* est la plus petite valeur de l'ensemble des valeurs de r qui vérifient $\phi(r) = 0$. Ainsi, les deux écritures suivantes sont équivalentes :

$$\arg(\phi(r) = 0) \iff \{r/\phi(r) = 0\}$$

On dit alors que *le domaine de stabilité* du système est défini par :

$$r^*\varphi = \bigcup_{k=1, \dots, n} [p_{k0} - r^*w_k, p_{k0} + r^*w_k]$$

l'ensemble $r^*\varphi$ exprime les variations maximales des paramètres permises pour que le système reste stable.

Pour l'approche multimodèle, la valeur de r^* peut être obtenue graphiquement à partir de l'allure de l'évolution de la partie réelle maximale des valeurs propres de la matrice $A(p)$ en fonction du coefficient de dilatation r . La figure 5.2 donne un exemple de cette courbe, on observe qu'au moins un pôle est à partie réelle positive à partir d'une dilatation de 1.875. Par conséquent, $r^* = 1.875$.

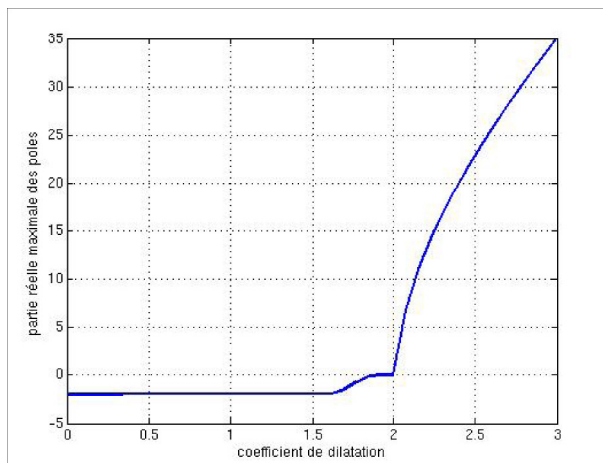


Figure 5.2: La partie réelle maximale des valeurs propres de la matrice $A(p)$ en fonction du coefficient de dilatation r

5.3.6 Critère de robustesse

On considère la fonction $\phi(r)$ définie par 5.3. On a :

- $\phi(0) < 0$ est une condition nécessaire de la stabilité nominale.
- $\phi(1) < 0$ est une condition nécessaire de la stabilité robuste.

En plus, on dit que le système est robustement stable sur le domaine de variation des paramètres $r^*\varphi$ si la marge de robustesse r^* est supérieure à 1.

Dans l'exemple précédent on a trouvé : $r^* = 1.875 > 1$. Donc, on peut dire que le système est robustement stable pour $p \in r^*\varphi$

5.4 Analyse de la robustesse du robot type-compass

À présent, nous allons adapter l'analyse multimodèle pour pouvoir analyser la stabilité robuste face aux variations paramétriques des allures de marche du robot type-compass. Nous allons nous intéresser aux trajectoires du robot générées par la commande à énergie minimale basée sur la linéarisation exacte. Les paramètres incertains sont le rapport des masses et le rapport des longueurs. nous commençons par la présentation des équations de la dynamique du robot exprimées en fonction de paramètres normalisés.

5.4.1 Modèle normalisé

Considérons le robot type-compass de la figure 5.3

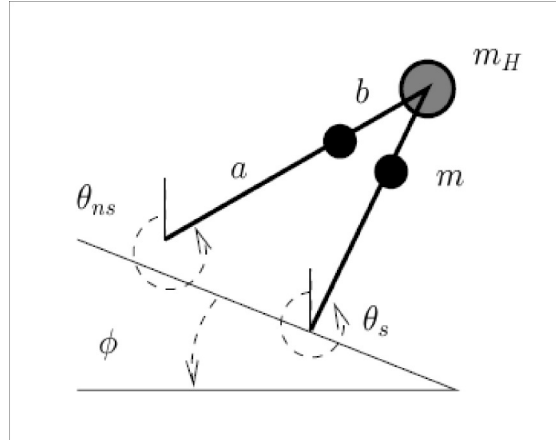


Figure 5.3: Le robot type compas

Une propriété remarquable des équations de la dynamique de ce type de robot, c'est qu'elles se prêtent bien à une normalisation en termes de rapports de masses et de longueurs notés respectivement μ et β définis par :

$$\mu = \frac{m_H}{m}$$

et

$$\beta = \frac{b}{a}$$

La dynamique de la phase de simple support est régie par les équations d'Euler-Lagrange suivantes :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + \frac{1}{a}G = Bu \quad (5.5)$$

avec M , C et G dépendent seulement de μ et de β et non pas de m ; m_H ; b et a . On a :

$$M = \begin{bmatrix} \beta^2 & -(1+\beta)\beta \cos(\theta_s - \theta_{ns}) \\ -(1+\beta)\beta \cos(\theta_s - \theta_{ns}) & (1+\beta)^2(\mu+1) + 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & (1+\beta)\beta \sin(\theta_s - \theta_{ns})\dot{\theta}_s \\ -(1+\beta)\beta \sin(\theta_{ns} - \theta_s)\dot{\theta}_{ns} & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} g\beta \sin(\theta_{ns}) \\ -((\mu+1)(1+\beta) + 1)g \sin(\theta_s) \end{bmatrix}$$

La dynamique du robot compas pendant la durée infinitésimale de l'impact est décrite par les équations suivantes :

Robot (m, m_H)	Robot (m', m'_H)
$\frac{m'}{m} = \frac{m'_H}{m_H} = k_m$	
q, L, T, v	q, L, T, v
E	$k_m E$

Tableau 5.1: Les caractéristiques de la marche de deux différents robot avec le même rapport de masse

$$\begin{cases} q^+ = Jq^- \\ Q^+ \dot{q}^+ = Q^- \dot{q}^- \end{cases} \quad (5.6)$$

avec :

$$Q^- = \begin{bmatrix} -\beta & -\beta + (\mu(1+\beta)^2 + 2(1+\beta)) \cos(2\alpha) \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}$$

$$Q^+ = \begin{bmatrix} \beta + (\beta - (1+\beta) \cos(2\alpha^-)) & (1+\beta)((1+\beta) - \beta \cos(2\alpha^-)) \\ \beta^2 & \dots + 1 + \mu(1+\beta)^2 \\ & -\beta(1+\beta) \cos(2\alpha^-) \end{bmatrix}$$

avec α^- l'angle du demi entre-jambe juste avant l'impact, égale à :

$$\alpha^- = \frac{\theta_{ns}^- - \theta_s^-}{2}$$

5.4.2 Propriété intéressante

Les caractéristiques de l'allure du robot avec des masses m et m_H arbitraires peuvent toujours être déduites à partir de celles d'un robot dont les masses sont dans la même proportion μ ([AGE96]). Plus précisément, les caractéristiques de deux différents robots de masses respectivement (m, m_H) et (m', m'_H) tel que

$$\frac{m'}{m} = \frac{m'_H}{m_H} = k_m$$

sont données par le tableau 5.1

L, T, v et E font référence respectivement à la longueur de pas, la période de pas, la vitesse moyenne de progression et l'énergie mécanique totale du robot.

De la même manière, on peut montrer ([AGE96]) que les quantités caractérisant l'allure du robot avec des longueurs a et b arbitraires peuvent toujours être déduites à partir de celles d'un robot dont les longueurs sont dans la même proportion β . Plus précisément, les caractéristiques de deux différents robots de longueurs respectivement (a, b) et (a', b') tel que

$$\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} = k_a$$

Robot (a, b)	Robot (a', b')
$\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} = k_a$	
q	q
\dot{q}	$\frac{1}{\sqrt{k_a}}\dot{q}$
L	$k_a L$
T	$\sqrt{k_a}T$
v	$\sqrt{k_a}v$
E	$k_a E$

Tableau 5.2: Les caractéristiques de la marche de deux différents robot avec le même rapport de longueur

sont données par le tableau 5.2

Ainsi, le modèle dynamique peut être paramétrisé par μ et β . Les effets des incertitudes de ces deux paramètres sur le comportement du robot seront analysés par la suite.

5.4.3 Robustesse en stabilité face aux incertitudes de μ et β

5.4.3.1 Modèle incertain

On considère le modèle normalisé de la dynamique de la phase de simple support du robot type compas donné par les équations de la dynamique (5.5) et (5.6). On suppose que les valeurs des paramètres μ et β ne sont pas connues d'une façon exacte. Chacune d'elles est uniformément distribuée entre une borne inférieure et une autre supérieure. on a :

$$\underline{\mu} \leq \mu \leq \bar{\mu} \quad (5.7)$$

$$\underline{\beta} \leq \beta \leq \bar{\beta} \quad (5.8)$$

Ainsi, les paramètres incertains sont donnés par les expressions suivantes :

$$\mu = \mu_{nom} + \delta_{\mu} w_{\mu}$$

$$\beta = \beta_{nom} + \delta_{\beta} w_{\beta}$$

tel que μ_{nom} et β_{nom} sont les valeurs nominales des paramètres incertains, $w_{\mu} = \frac{\mu + \bar{\mu}}{2}$, $w_{\beta} = \frac{\beta + \bar{\beta}}{2}$ et $\delta_{\mu}, \delta_{\beta} \in [-1, 1]$.

Dans ce cas, le domaine de variation des paramètres incertains est défini par :

$$\wp = \left[\begin{array}{cc} \mu_{nom} - w_\mu & \mu_{nom} + w_\mu \end{array} \right] \cup \left[\begin{array}{cc} \mu_{nom} - w_\beta & \mu_{nom} + w_\beta \end{array} \right]$$

Ainsi, on peut construire une famille de modèles incertains du robot compas paramétrisée par μ et β et noté $M(\mu, \beta)$ tel que :

$$M(\mu, \beta) \iff \begin{cases} M(\mu, \beta)\ddot{q} + C(\mu, \beta)\dot{q} + \frac{1}{a}G(\mu, \beta) = Bu \\ \begin{cases} q^+ = Jq^- \\ Q^+(\mu, \beta)\dot{q}^+ = Q^-(\mu, \beta)\dot{q}^- \end{cases} \end{cases} \quad (5.9)$$

On s'intéresse à la trajectoire du robot solution du système (5.9). Dans le cas de la linéarisation exacte du système, la commande par rétroaction linéarisante est obtenue en utilisant un modèle nominal :

$$u = M_{nom}v_{E^*T^*} + C_{nom}\dot{q} + G_{nom} \quad (5.10)$$

Les matrices M_{nom} , C_{nom} et le vecteur G_{nom} sont calculés pour les valeurs nominales des paramètres incertains notées μ_{nom} et β_{nom} .

$v_{E^*T^*}$ étant la commande à énergie minimale en un temps minimum. Elle est donné par (4.34).

5.4.3.2 Définition de la marge de robustesse des allures de marche :

Soit r un réel positif. Le domaine de variation des paramètres μ et β affecté par le coefficient de dilatation r est donné par

$$r\wp = \left[\begin{array}{cc} \mu_{nom} - rw_\mu & \mu_{nom} + rw_\mu \end{array} \right] \cup \left[\begin{array}{cc} \mu_{nom} - rw_\beta & \mu_{nom} + rw_\beta \end{array} \right]$$

On espère déterminer le coefficient de dilatation maximal tel que le domaine de variation regroupe les valeurs des paramètres pour lesquelles la trajectoire du robot converge vers un cycle limite stable. Ce coefficient de dilatation ainsi défini est appelé la marge de robustesse des allures de marche qu'on note r_{stab} .

On rappelle que la stabilité du cycle limite est vérifiée par l'examen des multiplicateurs caractéristiques de l'application de Poincaré qui s'identifient aux valeurs propres de la matrice monodrome. Ces dernières doivent être contenues dans le cercle unité pour que le cycle limite soit stable (voir § 2.5).

On ϕ la fonction qui à chaque valeur du coefficient de dilatation r associe le module maximal des valeurs propres de toutes les matrices monodromes associées aux trajectoires cycliques solutions de la famille des modèles(5.9) avec $\mu, \beta \in r\wp$. Ainsi, la fonction ϕ est sera définie par :

$$\begin{cases} \phi(r) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ r \mapsto \phi(r) = \max_{\substack{(\mu, \beta) \in r\wp \\ i=1, \dots, n_\Phi}} (\lambda_i(\Phi_{M(\mu, \beta)})) \end{cases} \quad (5.11)$$

$\Phi_{M(\mu, \beta)}$ étant la matrice monodrome associée à la trajectoire cyclique solution du modèle $M(\mu, \beta)$.

Par conséquent :

$$r^* = \min \arg(\phi(r) = 1)$$

5.4.3.3 Méthode de Résolution

La recherche de la valeur de r^* est effectuée par une investigation numérique. Les étapes suivies sont décrites par l'algorithme suivant :

Pour certaines des caractéristiques de marche (L_{pas} et T_{pas}) et un vecteur de conditions initiales fixés du robot type-compas. On définit des distributions linéaires sur $[r_{\min}, r_{\max}]$ et sur $r\wp$

1. On prend une valeur de $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$.
 - (a) On prend un jeu de paramètres $(\mu, \beta) \in r\wp$
 - i. On laisse le robot évoluer, sa dynamique est régie par le modèle $M(\mu, \beta)$, (5.9).
 - ii. Si la trajectoire du robot converge vers un cycle limite (le robot ne tombe pas), on passe à l'étape (1(a)iii) sinon on revient à l'étape (1a)
 - iii. On analyse la stabilité du cycle limite en utilisant l'application de Poincaré et la sensibilité de la trajectoire .
 - (b) revenir à 1a.
2. revenir à 1.
3. On calcule r_{cycle} qui garantie que la trajectoire du robot converge vers un cycle limite.
4. On calcule r_{stab} qui garantie que le cycle limite est stable.

On peut alors conclure que $r_{stable}\wp$ est le domaine de la stabilité des trajectoires périodiques du robot type-compas. En plus, si $r_{stable} > 1$ on conclue que le système est robustement stable pour $(\mu, \beta) \in r_{stable}\wp$.

Paramètre	Valeur	Unité	Définition
φ	3	deg	Angle de la pente
a	0.5	m	Distance entre la masse m et le pied
g	9.8	m/s^2	Accélération de la gravité

Tableau 5.3: les paramtres fixes du modle simul du robot compas

5.5 Simulations numériques

La trajectoires de marche nominale du robot a pour caractéristiques :

$$L_{pas} = 0.535m$$

$$v_{pas} = 0.7287m/s.$$

Les paramètres constants du modèle sont donnés par le tableau 5.3 :

Les valeurs nominales des paramètres μ et β sont données par :

$$\mu_{nom} = 2$$

$$\beta_{nom} = 1$$

On suppose une variation de μ de 20% de sa valeur nominale, et une variation de β est de 10% de sa valeur nominale. Ce qui implique que :

$$\varphi = [1.6 \quad 2.4] \cup [0.9 \quad 1.1]$$

La figure 5.4 décrit le comportement du robot compas face à la variations des paramètres incertains. On remarque que lorsque les paramètres μ et de β s'éloignent assez de leurs valeurs nominales, la trajectoire du système se détériore. Ce qui implique que la marche perd sa stabilité ou sa cyclicité et le robot tombe. A partir de la même figure, on retient aussi que la trajectoire de marche est plus sensible à la variation du rapport de longueurs qu'à celle du rapport de masses.

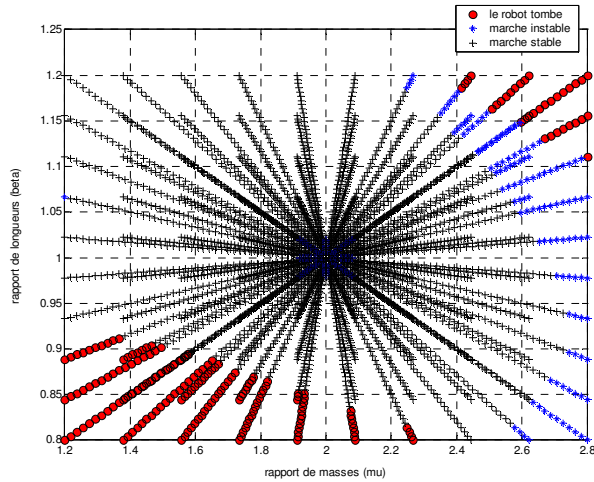


Figure 5.4: Le comportement de la trajectoire du robot type compas face aux variations des valeurs des paramètres incertains μ et β

Le programme de simulation nous a permis, en plus de quantifier les valeurs respectives des coefficients de dilatation minimales des paramètres qui mettent la trajectoire du robot dans les limites de la cyclicité et de la stabilité respectivement :

$$r_{cycle} = 1.0769$$

$$r_{stab} = 1.1692$$

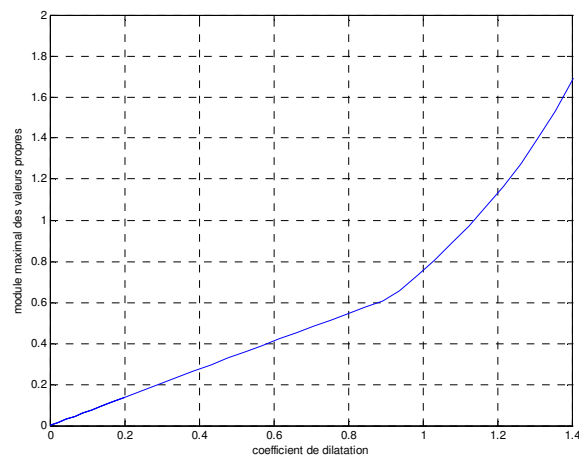


Figure 5.5: Module maximal des matrices monodromes associée à $M(\mu, \beta)_{\mu, \beta \in \mathcal{I}_\varphi}$ en fonction du coefficient de dilatation r

La marge de robustesse en stabilité peut aussi être obtenue graphiquement en examinant la figure ???. Cette figure donne pour chaque valeurs du coefficient de dilatation r en fonction du module maximal des valeurs propres de toutes les matrices monodromes associées à la famille des modèles $M(\mu, \beta)_{\mu, \beta \in r\varphi}$. r_{stab} est le point d'intersection de la courbe avec la droite $y = 1$.

On a $r_{stab} > r_{cycle}$, c'est prévisible puisque d'après la figure 5.4, on constate pour certaines valeurs de r supérieures à 1.0769, il y des trajectoires qui divergent (le robot tombe) et d'autres qui convergent vers un cycle limite stable. Pour des raisons de sécurité, on prend :

$$r^* = r_{cycle} = 1.0769$$

On conclue que le domaine de la stabilité est donné par :

$$r^*\varphi = \left[1.5692 \quad 2.4308 \right] \cup \left[0.8923 \quad 1.1077 \right] \supset \varphi$$

On a $r^* > 1$. Alors, on peut dire que le système est robustement stable pour $\mu, \beta \in r^*\varphi$.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes penché sur l'analyse de la robustesse des cycle limites correspondant à la marche du robot compas face aux incertitudes paramétriques. Pour cela on a utilisé une analyse numérique multimodèle qui consiste à effectuer un balayage paramétrique afin de déterminer l'ensemble des paramètres qui garantissent une marche périodique stable du robot. Les limitations de cette technique c'est qu'elle permet une analyse de la robustesse optimiste (on ne tient pas compte de tous les cas) et qu'elle se caractérise par un temps de calcul exponentiel en fonction du nombre de paramètres et de la finesse de l'échantillonnage. Cependant, les résultats obtenus sont encourageants. Il nous ont permis de connaître la marge de variation sécuritaire des paramètres géométriques du robot type compas pour que sa trajectoire garde son caractère cyclique et sa stabilité. En plus, l'analyse des résultats de simulation a révélé la robustesse locale de la commande par rapport aux variations des paramètres du système robotique. Ce qui prouve une fois encore la validité de notre approche de commande à énergie minimale pour la marche des robots bipèdes.

Conclusion et perspectives

Conclusion générale

La locomotion à pattes fait partie des modes de déplacement les plus efficaces et les plus intéressants à étudier du fait des avantages qu'ils présentent lors des déplacements sur des terrains accidentés et irréguliers. Ces dernières années, de nombreuses recherches ont été dédiées au domaine des robots marcheurs. Ainsi, on a assisté à des études et des réalisations de robots hexapodes, quadripèdes et surtout des bipèdes et même des humanoïdes. En fait, La bipédie représente le mode de locomotion de l'être humain qui est le modèle par excellence de tous les robots marcheurs.

Le robot type-compass représente le modèle le plus élémentaire de la locomotion bipède. Les jambes de ce robot sont deux bars rigides, sans genoux ni pieds et connectés sans frottement au niveau des hanches. Une caractéristique intéressante du robot type-compass est celle de la marche passive qui résulte de sa dynamique intrinsèque. En effet, le robot posé sur un plan incliné marche de façon cyclique et stable bien qu'il n'est soumis à aucune action extérieure sauf celle de la gravité : le point d'appui du robot se déplace suivant la même direction et les pertes énergétiques dues aux contacts avec le sol sont compensées par la variation de l'énergie potentielle provoquée par le déplacement sur un plan incliné.

Dans ce travail de thèse, nous avons choisi de nous limiter à l'étude du robot type-compass. En effet malgré la simplicité de ce mécanisme, il met en évidence les principales caractéristiques des robots marcheurs bipèdes à savoir la forte non linéarité et le caractère hybride. En fait, à l'instar des autres robots bipèdes, son mouvement de marche résulte de la combinaison d'une dynamique non linéaire continue et d'un enchaînement de pas à temps discret.

- Ainsi, dans l'introduction générale, ou nous avons parlé un peu de l'histoire du mot robotique pour arriver au robot marcheur type bipède pour lequel nous avons présenté l'état de l'art en ce qui concerne les réalisations et les approches de commandes.
- Le premier chapitre était consacré à une description concise des mécanismes de la marche humaine ce qui nous a permis de poser les principes de base d'une marche robotique.
- Dans le deuxième chapitre nous avons présenté le modèle du robot type-compass qui fera l'objet de notre étude. Le mouvement de marche du robot est décrit par des équations de la dynamique hybride. En plus, les différentes méthodes théoriques pour l'étude de la

marche passive sur une pente sont présentées.

La principale contribution de notre travail concerne la commande des allures de marche du robot type-compas. Ainsi, nous avons développé différentes approches de commande pour réaliser des marches périodiques stables du robots type-compas.

- Dans le troisième chapitre, en se basant sur la notion de marche passive, on présente des lois de commande qui s'approchent le plus de l'attitude humaine, et fournit une solution intéressante à l'une des plus difficile problématique du robot bipède à savoir l'autonomie énergétique. Elles consistent en une paramétrisation des allures de marche (représentées par des cycle limite dans le plan de phase) en fonction de quelques paramètres pertinents : à savoir l'angle de l'inclinaison du support de marche ([SB03]) et le temps. Les approches de commande permettent par conséquent de générer des cycles limites "semi-passifs" stables pour différentes valeurs de pente et de vitesse de progression. En outre, une optimisation à été effectuée afin de déterminer, pour chaque valeur de pente, la vitesse optimale qui permet de minimiser les pertes énergétiques durant la marche. Pour la validation des différentes approches de commandes conçues, des résultats de simulations ont été fournis.
- Au chapitre 4, nous nous sommes intéressés à la réalisation des allures de marche stables en se basant sur la linéarisation exacte de la dynamique du robot type-compas pendant la phase de simple support. Ce qui nous a autorisé à utiliser des commandes de la théorie des systèmes linéaires. Ainsi, une commande simple par placement de pôles a permis non seulement d'assurer la stabilisation de trajectoires pré calculées du robot, mais aussi d'améliorer la robustesse des allures de marche face à la variation des conditions d'initialisation du système. En plus, on a fait subir aux articulation des du robots des trajectoires cycliques stables par définition en utilisant la loi de commande à énergie minimale avec minimisation du temps par la résolution d'un problème linéaire quadratique. Par conséquent, cette dernière technique de commande assure trajectoires de marche stables et rapides avec des dépenses énergétique minimales et des caractéristiques de marche désirées.
- Dans le cinquième chapitre, nous avons déterminé la marge de robustesse face aux incertitudes paramétriques pour les trajectoires du robot type compas. Ces dernières sont réalisées par l'approche de commande basée sur la linéarisation exacte et qui utilise la commande à énergie minimale en un temps minimum. Nous avons opté pour une méthode d'analyse multi-modèle qui utilise le balayage paramétrique. La marge de stabilité trouvée correspond au domaine des variations des paramètres géométriques permises afin d'assurer une marche périodique stable.

Perspectives

Les perspectives de ce travail s'articulent autour des points suivants :

- Pour la marche humaine, le simple support représente 70 à 80% d'un cycle de marche, alors que le double support n'en représente que 20 à 30%. Dans cette optique, nous avons supposé dans notre étude que le cycle de marche du robot type-compas n'est constitué que de phases de simples support séparées par des impacts instantanés. Cependant, on pourrait envisager d'entamer l'étude en tenant compte de la phase de double support. Certes, cela pourrait augmenter la complexité du système mais l'étude de la marche sera plus complète.
- En ce qui concerne la modélisation du contact pieds-sol, nous avons opté pour un modèle simple qui est le modèle rigide et qui donne une vision idéale du phénomène de contact. Une autre alternative à ce sujet consiste à utiliser un modèle plus réaliste qui prend en considération la nature compliant des corps en contact (le pieds et le support de marche). Le modèle compliant peut être associé à une modélisation dynamique du frottement.
- Les approches de commandes développées dans ce mémoire sont appliquées seulement au robot type-compas alors qu'elle peuvent facilement être adaptées à d'autres modèles de robots bipèdes (avec tronc et genoux par exemple), donc sur des systèmes marcheurs à plusieurs degrés de liberté.
- Pour l'analyse de la robustesse en stabilité des allures de marche du robot face aux incertitudes paramétriques ou à d'autres perturbations extérieures, On peut aussi envisager d'utiliser des méthodes analytiques plus performantes telles que la μ -analyse et la méthode H_∞ qui permet aussi l'étude de la robustesse en performance.
- Les cycles limites de marche passifs ou actifs ont montré une grande sensibilité aux incertitudes sur le modèle. Il serait alors, intéressant de penser à des commandes stabilisantes pour améliorer la robustesse des allures de marche. Pour cela, on pourrait utiliser la commande par mode glissant ou la commande basée sur l'approche de Lyapunov.(Lyapunov Redesign)

Références bibliographiques

- [AF00] Y. Aoustin and A. Formal'sky. Conception d'une loi de commande d'une bipède dont les articulations motorisées sont fonctions d'une variable non commandée. In "In Proceeding of the CIFA", pages 840–845 (Juillet 2000).
- [AGE96] B. Thuilot, A. Goswami and B. Espiau. Compass-like biped robot part i: Stability and bifurcation of passive gaits. Technical Report 2996, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA) (1996).
- [Ala96] Nour El Houda El Alami. Linéarisation par feedback des systèmes non linéaires. Master's thesis, Ecole Mohammadia d'ingénieurs, Rabat, Maroc (1996).
- [Ale83] R. M. Alexander. "Animal Mechanics". Blackwell, Oxford (1983).
- [AYF00] F. Asano, M. Yamakita, and K. Furuta. Stabilizing control of passive biped robots and its application to active walking. In "In Proceeding of the Fifth Int. Symp. on Artificial Life and Robotics", pages 503–506 (2000).
- [Bha02] G. Bhatia. Passivity-based control of biped robots. Master's thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign (2002).
- [BL85] J. Basmajian and C. De Luca. "Muscles Alive: Their Functions Revealed by Electromyography". MD: Williams and Wilkins, Baltimore (1985).
- [Cab97] G. Cabodivilla. "Synthèse de la marche à énergie minimale d'un robot bipède". PhD thesis, Université de Louis Pasteur, Strasbourg, France (1997).
- [CAI94] M. Cailleux. "AMPUTATION DE CUISSE CHEZ L'ADULTE ACTIF : PLAIDOYER POUR LE CAT-CAM." PhD thesis, Faculté de Médecine et de Pharmacie de Besançon (1994).
- [CAO94] N. Chaillet, G. Abba, and E. Ostertag. Double dynamic modelling and computed-torque control of a biped robot. pages 1149–1155 (1994).
- [CH93] T. Chang and Y. Hurmuzlu. Sliding control without reaching phase and its application to bipedal locomotion. *Journal of Dynamics Systems, Measurement and Control* **115**, 447–455 (1993).
- [Che98] Chi-Tsong Chen. "Linear System Theory and Design (3rd edition)". Oxford Univ Pr, Oxford (1998).

- [Col98] M. JOHN. COLEMAN. “A stability study of a three dimensional passive-dynamic model of human gait”. PhD thesis, Faculty of the graduate school of cornell university (1998).
- [CRTW05] S.H. COLLINS, A. RUINA, R. TEDRAKE, AND M. WISSE. Efficient bipedal robots based on passive dynamic walkers. *Science Magazine* **307**, 1082–1085 (February 2005).
- [CWR01] S.H. COLLINS, M. WISSE, AND A. RUINA. A 3-d passive-dynamic walking robot with two legs and knees. *International Journal of Robotics Research* **20**, 607–615 (2001).
- [CY01] C. CHEVALLEREAU AND Y.AOUSTIN. Optimal reference trajectories for walking and running of a biped robot. *Robotica* **19**, 553–569 (2001).
- [EOZ98] N. ELALAMI, A. OUANSAFI, AND N. ZNAIDI. On the discrete linear quadratic minimum-time problem. *Journal of The Franklin Institute, Elsevier* **335** (1998).
- [Ers97] T. ERSSON. A biped walking machine: Experiments and theory. Master’s thesis, School of Engineering Physics, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden (1997).
- [GAP01] J.W. GRIZZLE, G. ABBA, AND F. PLESTAN. Asymptotically stable walking for biped robots: Analysis via systems with impulse effects. *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**, 51–64 (2001).
- [Gar98] M. GARCIA. “Stability, Chaos and scaling laws: Passive dynamic gait models”. PhD thesis, Cornell university, Ithaca, NY (1998).
- [GCRC98] M. GARCIA, A. CHATTERJEE, A. RUINA, AND M. COLEMAN. The simplest walking model: Stability, complexity, and scaling. *ASME Journal of Biomechanical Engineering* **120**, 281–288 (1998).
- [GEK97] A. GOSWAMI, B. ESPIAU, AND A. KERAMANE. Limit cycles in a passive compass gait biped and passivity-mimicking control laws. *Journal of Autonomous Robots* **4**, 273–286 (1997).
- [GTE98] A. GOSWAMI, B. TUILOT, AND B. ESPIAU. A study of the passive gait of a compass-like biped robot : Symmetry and chaos. *International Journal of Robotics Research* **17**, 282–301 (1998).
- [HF77] H. HEMAMI AND R. L. FARNSWORTH. Postural and gait stability of planar five link biped by simulation. *IEEE Transactions on Automatic Control* **22**, 452–458 (1977).
- [HHHT98] K. HIRAI, M. HIROSE, Y. HAIKAWA, AND T. TAKENAKE. The development of honda humanoid robot. In “In Proceeding of the IEEE International Conference on Robotics and Automation”, page 1321.1326 (may 1998).

- [His01] I.A. HISKENS. Stability of hybrid system limit cycles: Application to the compass gait biped robot. In “In Proceeding of the 40th IEEE Conference on Decision and Control” (December 2001).
- [HP00] I.A. HISKENS AND M.A. PAI. Trajectory sensitivity analysis of hybrid systems. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications* **47**, 204–220 (2000).
- [KB93] J. KIEFER AND R. BALE. Walking viability and gait synthesis for a novel class of dynamically-simple bipeds. *Informatica* **17**, 145–155 (1993).
- [KD88] W. KHALIL AND E. DOMBRE. “Modlisation et commande des robots”. trait des nouvelles technologie, herms, Paris (1988).
- [Ker97] A. KERAMANE. “Cycles de marche des robots de types compas : Analyse et commande”. PhD thesis, Institut national Polytechnique de Grenoble, France (1997).
- [KH03a] K. KONDAK AND G. HOMMEL. Control algorithm for stable walking of biped robots. In “in Proceedings of the Sixth Int. Conf. on Climbing and Walking Robots (CLAWAR)” (2003).
- [KH03b] K. KONDAK AND G. HOMMEL. Control and online computation of stable movement for biped robots. In “in Proceedings of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems (IROS)” (2003).
- [Kha96] H. K. KHALIL. “Nonlinear systems”. Prentice Hall (1996).
- [Khr04] N. KHRAIEF. “Commande nergtique pour la marche de robots bipdes planaires”. PhD thesis, Universit de Versailles Saint Quentin en Yvelines (2004).
- [LAM06] O. LICER, N. EL ALAMI, AND M. MRABTI. Optimal gaits for compass-like biped robot. In “In Proceedings of the The 10th WSEAS International Conference on SYSTEMS” (2006).
- [LAM07] O. LICER, N. EL ALAMI, AND M. MRABTI. Lyapunov stability of hybrid system limit cycle: Application to the compass gait biped. (2007).
- [LH99] P.Y. LI AND R. HOROWITZ. Passive velocity field control of mechanical manipulators. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **15** (1999).
- [LMMA06] O. LICER, N K. MSIRDI, N. MANAMANNI, AND N. EL ALAMI. Stable periodic gaits of n-link biped robot in three dimensional space. In “In Proceedings of the 8th International IFAC Symposium on Robot Control” (2006).
- [LP98] M.J. LANFENBERG AND M.A. PAI. A new approach to dynamic security assessment using trajectory sensitivities. *IEEE Transactions on power systems* **13** (1998).
- [Mar76] R. MARGARIA. “Biomechanics and energetics of Muscular Exercise”. Clarendon, Oxford (1976).

- [Mas00] T. MASSON. Gometrie diffrentielle, groupes et algbres de lie, fibrs et connexions. Technical Report, Laboratoire de physique thorique, Universit d’Orsay (2000).
- [MBSS90] M.VUKOBRATOVIC, B. BOROVAV, D. SURLA, AND D. STOKIC. “Biped Locomotion: Dynamics, Stability, Control and Application”. Springer-Verlag, Great Britain,London (1990).
- [MBSS97] M.VUKOBRATOVIC, B. BOROVAV, D. SURLA, AND D. STOKIC. “Human and machine locomotion”. LNCIS. Springer Verlag, Udine, Italy (1997).
- [McG90a] T. MCGEER. Dynamics and control of bipedal locomotion. *Progress in Robotics and Intelligent Systems* (1990).
- [McG90b] T. MCGEER. Passive dynamic walking. *International Journal of Robotics Research* **9**, 62–82 (1990).
- [McG90c] T. MCGEER. Passive walking with knees. In “In Proceeding of the IEEE Conference on Robotics and Automation”, pages 1640–1645 (1990).
- [McN84] R. MCN.ALEXANDER. The gait of bipedal and quadrupedal animals. *International J. Robotics Research* **3** (1984).
- [MR99] J.E. MARSDEN AND T. S. RATIU. “Introduction to mechanics and symmetry”. Spring Verlag, New York (1999).
- [MS] T. MCGEE AND M. SPONG. Trajectory planning and control of a novel walking biped. In “In IEEE International Conference on Control Applications”.
- [MS84] H. MIURA AND I. SHIMOYAMA. Dynamic walk of a biped. *Int. J. Of Robotics Research* **2**, 60–74 (1984).
- [MVS01] B. BOROVAC M. VUKOBRATOVIC AND D. SURDILOVIC. Zero-moment point proper interpretation and new applications. In “in Proceedings of the IEEE-RAS Int. Conf. on Humanoid Robots”, page 237244 (2001).
- [OLC03] N. NADJAR-GAUTHIER O. LICER AND J. C. CADIOU. Gnration de trajectoires de rfrence dun robot bipde pour diffrentes allures de marche. In “Actes des 17mes Journes Jeunes Chercheurs en Robotique (JJCR’2003) au Laboratoire de Robotique de Versailles, Vlizey, France.”, page 19831988 (april 2003).
- [Ost06] E. OSTERTAG. “Automatique - Commande et estimation multivariables”. Ellipses, Paris (2006).
- [PC89] T.S. PARKER AND L.O CHUA. “Practical numerical algorithms for chaotic systems”. Springer Verlag (1989).
- [PVB83] F. PLAS, E. VIEL, AND Y. BLANC. “La marche humaine : kisiologie dynamique, biomcanique et pathomcanique”. Masson (1983).
- [Rai86] M. RAIBERT. Legged robots that balance. *MIT Press* (1986).

- [RG98] M. ROSTAMI AND G. BESSONNET. Impactless saggital gait of a biped robot during the single support phase. In “In Proceeding of the IEEE Robotics and Automation Conference”, pages 1385–1391 (1998).
- [Rou98] L. ROUSSEL. “Gnration de trajectoires de marche optimales pour un robot bipdes”. PhD thesis, Institut national Polytechnique de Grenoble (1998).
- [SB02] M.W. SPONG AND F. BULLO. Controlled symmetries and passive walking. In “In Proceeding of IFAC World Congress”, pages 19–24 (2002).
- [SB03] M. W SPONG AND G. BHATIA. Further results on control of the compass gait biped. In “In Proceeding of the IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems”, page 2731 (2003).
- [SLM00] M. W SPONG, R. LOZANO, AND R. MAHONY. An almost linear biped. In “In Proceeding of the IEEE Conference on Decision and Control”, pages 4803–4808 (December 2000).
- [Spo87] M. W. SPONG. Modeling and control of elastic joint robot. *Trans.of the ASME: Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **109**, 310–319 (1987).
- [Spo99] M.W. SPONG. Passivity based control of the compass gait biped. In “In Proceeding of the IFAC World Congress China”, pages 19–24 (1999).
- [SY95] Y.-J. SEO AND Y.-S. YOON. Design of a robust dynamic gait of the biped using the concept of dynamic stability margin. *Robotica, Cambridge University Press, Cambridge, ROYAUME-UNI* **13** (1995).
- [Vid78] M. VIDYASAGAR. “Nonlinear Systems Analysis”. Prentice Hall (1978).
- [VL91] E.I. VERRIEST AND F.L LEWIS. On the linear quadratic minimum-time problem. *IEEE Transactions on Automatic Control* **36** (1991).
- [Vuk70] M. VUKOBRATOVIC. On the stability of biped locomotion. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering* (1970).
- [Wei00] P. B. WEIBER. “Modlisation et commande d’un robot marcheur anthropomorphe”. PhD thesis, Ecole des mines de Paris (2000).
- [Wis04] M. WISSE. “Essentials of dynamic walking: Analysis and design of two-legged robots”. PhD thesis, T.U. Delft, Delft, the Netherlands (2004).
- [WP04] S. WISCHMANN AND F. PASEMANN. From passive to active dynamic 3d bipedal walking - an evolutionary approach. In “7th Int. Conference on Climbing and Walking Robots (CLAWAR 2004)”, pages 737–744 (september 2004).
- [yA01] M. YAMAKITA AND F. ASANO. Extended passive velocity filed control with variable velocity fields for a kneed biped. *Advanced Robotics* **15**, 139–168 (2001).

- [Zie97] T. ZIELINSKA. Utilisation of biological patterns in reference trajectories generation of walking machines. In “in Proceedings of th IEEE 8th Int. Conference on Advanced Robotics”, pages 92–104 (1997).
- [ZR79] M. Y. ZARRUGH AND C. W RADCLIFFE. Computer generation of humain gait kinematics. *J. Biomech* **12**, 99–110 (1979).